APLICAÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E EQUAÇÕES EM DIFERENÇAS NO MODELO DE INTERAÇÃO ENTRE DESEMPREGO E INFLAÇÃO

SILVA, Isaac Pedro[1]
RU 2581017
FONSECA, Edimar Fonseca da[2]

RESUMO

As equações diferenciais e em diferenças têm vasta aplicação a fenômenos físicos, biológicos e na engenharia, e podem se tornar uma poderosa ferramenta para explicar fenômenos econômicos e financeiros. Modelos econômicos são construídos a partir da intuição sobre fatos estilizados e outras situações observados na história do pensamento econômico, acontecidos em diversas economias, e são utilizados para determinar políticas públicas e destinos no desenvolvimento dos países. Dada sua relevância, foram utilizados elementos dessas equações para analisar um fenômeno importante na teoria macroeconômica. Usando uma metodologia exploratória na literatura, buscou-se conceituar e caracterizá-las, aplicando soluções no modelo de interação entre desemprego e inflação, conhecido como Curva de Phillips. A análise do fenômeno mostrou que, embora a premissa básica tenha partido de observação numa análise estatística, dados insuficientes ou ausentes tornariam o trabalho custoso ou impossível de ser realizado mostrando, assim, a superioridade na determinação do equilíbrio dinâmico do fenômeno, quando se faz uso de equações diferenciais e em diferenças, sua análise e soluções.

Palavras-chave: Equações Diferenciais, Equações em diferenças, Inflação, Desemprego, Relação de Phillips.

1. INTRODUÇÃO

As equações diferenciais e em diferenças, além da vasta aplicação à fenômenos físicos, biológicos e na engenharia, podem também se tornar uma poderosa ferramenta para explicar fenômenos econômicos e financeiros. Embora o arsenal seja bastante amplo, para certas aplicações nessas áreas, bastam equações de ordem parcimoniosa para que os modelos teóricos sejam amparados.

---

[1] Aluno do Centro Universitário Internacional UNINTER. Artigo apresentado como Trabalho de Conclusão de Curso (02.2021)

[2] Professor Orientador no Centro Universitário Internacional UNINTER.

Os fenômenos dinâmicos em economia se apresentam como variáveis ao longo do tempo, como taxas de desemprego, taxas de inflação ou de crescimento do Produto Interno Bruto – PIB, além do outras grandezas. É possível analisar esses fenômenos através do ferramental disponibilizado por essas equações. No entanto, como a variável tempo é geralmente tratada como discreta, as equações de diferenças frequentemente expressam mais adequadamente as relações econômicas, que as equações diferenciais (YAMANE, 1972).

Os manuais de referência nos cursos de graduação que aplicam elementos de matemática pura aos problemas, em diversas áreas, se beneficiam do campo de estudo das equações diferenciais e em diferenças por este já se encontrar sedimentado. Isso faz com que seu uso promova confiança na aplicação dos resultados e, assim, a implementação seja facilitada e compreendida por uma audiência com treinamento adequado.

Do ponto de vista prático, os usos dessa ferramenta já estavam inseridos no contexto de análises de áreas de estudo como a economia e finanças, porque muito embora a análise didática se valha de análises estáticas e comparativas, no mundo real, praticamente todos os fenômenos econômicos e financeiros são dependentes do tempo e, mesmo os indexados no espaço, precisam da dimensão “tempo” para que seus efeitos sejam analisados. Portanto, é imprescindível que uma análise dinâmica se apresente para fazer sentido a aplicação e sejam mostrados os resultados, por exemplo, de uma série temporal de apreçamento de ações, da taxa de desemprego ou nível de produção industrial, em uma economia.

Para tanto, este trabalho busca utilizar os elementos de matemática necessários para analisar um fenômeno importante na teoria macroeconômica e, para isso, buscar-se-á aplicar equações diferenciais e equações em diferenças no modelo de interação entre desemprego e inflação, como seu objetivo geral. De forma subjacente, acrescentar-se-á algum significado econômico aos resultados, que são provenientes da teoria econômica, de fatos estilizados e de contextos específicos nos períodos históricos numa economia que, porventura, venha a experimentar o fenômeno.

Junto a este objetivo, além desta introdução, o trabalho está organizado de modo a buscar conceituar e caracterizar as equações diferenciais e em diferenças, no que seja necessário para aclarar a direção da apresentação. Em seguida, será necessário explicitar os principais métodos de resolução das soluções, no cabem à análise. Na seção consecutiva, apresentaremos os fenômenos da inflação e do desemprego, bem como sua relação e, por fim, apresentaremos a solução de modelos macroeconômicos teóricos aplicando equações diferenciais e de diferenças, focando seu aspecto matemático e interpretações econômicas.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1. Metodologia

Para esta pesquisa, seguiremos a classificação conforme Gil (2019). Desta forma, a pesquisa ora idealizada atenderá a finalidade de ser uma pesquisa aplicada pois, segundo o autor, estudos deste tipo têm a finalidade de resolver problemas no âmbito das sociedades em que os pesquisadores vivem.

A pesquisa será também exploratória, já que tem como propósito proporcionar maior familiaridade com o problema, com vistas a torná-lo mais explícito ou construir novas hipóteses. Além disso, haverá coleta de dados através de um levantamento bibliográfico, o que destaca a intenção de uma pesquisa bibliográfica e, segundo a natureza dos dados, será quantitativa (GIL, p. 26, 2019).

2.2. Elementos da teoria das equações diferenciais

Segundo Figueiredo & Neves (2010), o estudo das equações diferenciais tem seu início datado no final do século XVII, em decorrência de problemas da física perseguidos pelos criadores do cálculo: Newton e Leibniz. A preocupação em torno da solução desses problemas mirava a obtenção de soluções explícitas das equações e, incialmente, procurava-se expressar as soluções em termos de funções elementares, utilizando métodos que reduziam os problemas ao cálculo de primitivas, cujo processo era chamado de quadratura (idem, p. 1, 2010).

Ainda segundo os autores supracitados, o rigor que a (disciplina) Análise apresentava ao longo do século XIX, pôs a prova alguns métodos e operações que faziam uso das séries de funções. Além desse fato, houve o surgimento dos importantes teoremas de existência e unicidade de soluções, marcando o início da fase moderna.

Formalmente, tendo uma aplicação $f: U \to \mathbb{R}^n$, definida em cada ponto (t, x) de um aberto U de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1}$, dizemos que

$$x' = f(t, x) \tag{2.2.1}$$

é uma equação diferencial ordinária – EDO em $\mathbb{R}^n$ definida por f (DOERING & LOPES, 2010). Da mesma forma, estes autores afirmam que uma solução da equação diferencial ordinária mencionada, às vezes denominada curva integral da equação, é um caminho $x : I \to \mathbb{R}^n$ definido e derivável num intervalo I de $\mathbb{R}$, com gráfico inteiramente contido em U, e velocidade determinada por f, tal que, para cada $t \in I$,

$$\big(t, x(t)\big) \in U \quad e \quad x'(t) = f\big(t, x(t)\big). \tag{2.2.2}$$

Considerando que podemos fixar um ponto $(t_0, x_0) \in U$, sendo que $x: I \to \mathbb{R}^n$ de $x' = f(t, x)$ e como $t_0 \in I$ e $x(t_0) = x_0$, dizemos que tal solução satisfaz a condição inicial $x(t_0) = 0$. Esta condição também é conhecida como o Problema de Valor Inicial – PVI, da seguinte forma

$$x' = f(t, x)\,, x(t_0) = x_0. \tag{2.2.3}$$

Conforme Doering & Lopes (2010), a existência de soluções de equações diferenciais em $\mathbb{R}^n$ é garantida pela continuidade de f. Seguindo o que descrevem Figueiredo & Neves (2010), a forma geral das equações diferenciais ordinárias lineares de primeira ordem é do tipo

$$\dot{x} = p(t)x + q(t), \text{[3]} \tag{2.2.4}$$

onde $p: (a, b) \to \mathbb{R}$ e $q: (a, b) \to \mathbb{R}$ são funções reais contínuas definidas em um intervalo aberto (a, b). Assim, uma função $x: (a, b) \to \mathbb{R}$ é uma solução de uma equação destacada acima, se ela for diferenciável e satisfazê-la.

A literatura de equações diferenciais sempre mostra que no estudo de equações dessa natureza, necessariamente, aparecerem dois problemas considerados básicos, quais sejam, obter a solução geral, com uma expressão que englobe todas as duas soluções e a obtenção da solução de um PVI

$$\begin{cases} \dot{x} = p(t)x + q(t) \\ \quad x(t_0) = x_0 \end{cases}, \tag{2.2.5}$$

onde $t_0 \in (a, b)$ e x_0 são dados iniciais (FIGUEIREDO & NEVES, 2010).

Considerando esta equação (2.2.5), assumindo que $q(t) \equiv 0$, e o PVI correspondente a

---

[3] A notação $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, designando a derivada de x com relação à variável independente t.

$$\begin{cases} \dot{x} = p(t)x \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}, \qquad (2.2.6)$$

os quais podem ser estudados de modo semelhante e, assim, a solução do PVI homogêneo em (2.2.6) será dado por

$$x(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^{t} p(s)ds}. \qquad (2.2.7)$$

Assim, a resolução do PVI (2.2.5), no caso geral, é feita com o uso do Fator Integrante $\mu(t)$ e, para determiná-lo, procedemos a seguinte forma:

$$\mu(t)(\dot{x} - p(t)x) = \mu(t)q(t) \qquad (2.2.7)$$

$$(\dot{x} - p(t)x) = \frac{d}{dt}(\mu x) = \dot{\mu}x + \mu\dot{x} \qquad (2.2.8)$$

$$\dot{\mu}x = -\mu p(t)x \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{\mu}}{\mu} = -p(t) \qquad (2.2.9)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\ln(\mu) = -p(t) \qquad (2.2.10)$$

$$\Rightarrow \quad \ln(\mu) = -\int p(s)ds \qquad (2.2.11)$$

$$\Rightarrow \quad \mu(t) = -e^{\int_{t_0}^{t} p(s)ds} = e^{\int_{t}^{t_0} p(s)ds}. \qquad (2.2.12)$$

Chamando $T(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^{t} p(s)ds}$ e $T(t, s) = T(t, t_0)T(t_0, s)$, temos que a expressão para a solução do problema de valor inicial (2.2.5), que se torna

$$x(t) = T(t, t_0)x + \int_{t_0}^{t} T(t, s)q(s)ds, \qquad (2.2.13)$$

fórmula esta conhecida como fórmula de variação das constantes, onde também foi admitido que a solução existe.

Seguindo na coleta das ferramentas necessárias para atingir nosso objetivo, é imprescindível levantar o papel das equações diferenciais de segunda ordem. Simon & Blume (2004) reconhecem que a classe das equações diferenciais de segunda ordem com coeficientes constantes é a mais importante classe de equações das ciências físicas, a qual deriva do fato de surgirem naturalmente em tais aplicações, devido ao termo da aceleração na Lei de Newton e também do fato da linearidade dessas equações aparecerem naturalmente em modelos, dada a simplicidade e o papel como aproximações em equações não-lineares.

Consideremos, então, uma equação homogênea de segunda ordem numa forma geral, assim escrita

$$a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = 0. \qquad (2.2.14)$$

Tomando $a = 0$, a equação (2.2.14) se torna uma equação linear de primeira ordem, cuja solução pode ser escrita como $y = e^{rt}$. Acompanhando a notação de Simon &

Blume (2004), para encontrar tais soluções, é possível representar $y = e^{rt}, \dot{y} = re^{rt}$ e $\ddot{y} = r^2e^{rt}$ na equação (2.2.14), cuja substituição a torna

$$ar^2e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} = e^{rt}(ar^2 + br + c) = 0. \tag{2.2.15}$$

Da equação (2.2.15), vemos que $e^{rt} \neq 0$, tornando este termo uma solução da equação (2.2.14) se, e somente se, r satisfizer a equação $(ar^2 + br + c) = 0$, que é uma equação quadrática conhecida como equação característica de (2.2.14). É comum utilizarmos a fórmula de resolução das equações quadráticas para obter suas raízes

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \tag{2.2.16}$$

cuja conveniência nos leva a uma regra de decisão com três possibilidade para encontrar suas soluções. Ou seja, a equação terá

- Duas raízes reais distintas se $b^2 - 4ac > 0$,
- Duas raízes iguais se $b^2 - 4ac = 0$ e
- Duas raízes complexas, quando $b^2 - 4ac < 0$.

O exame desses três casos pode ser apresentado em teoremas cujas provas podem ser encontradas em livros textos clássicos, como em Doering & Lopes (2010), Figueiredo & Neves (2010), Zill & Cullen (2001), Simon & Blume (2010), Chiang & Wainwright (2006), entre outras possibilidades no arsenal das equações diferenciais ordinárias.

2.3. Elementos da teoria das equações em diferenças

Os cálculos matemáticos frequentemente são baseados em equações que nos permitem calcular o valor de uma função, recursivamente, a partir de um determinado conjunto de valores. Tal equação é chamada de equação de diferença ou equação de recorrência. Essas equações ocorrem em vários cenários e formas, tanto na própria matemática quanto em suas aplicações a estatística, computação, análise de circuitos elétricos, sistemas dinâmicos, economia, biologia e outros campos (KELLEY & PETERSON, 2001).

Uma sequência é uma função cujo domínio é o conjunto de inteiros e, geralmente, consideram-se as sequências cujos domínios são inteiros não negativos (MICKENS, 2015). O membro geral de uma sequência pode ser denotado por y_k e a notação $\{y_k\}$ é usada para representar a sequência $y_0, y_1, y_2, \ldots$ Uma regra de formação pode ser suposta da forma

$$y_{\{k+n\}} = F\left(k, y_{\{k+n-1\}}, y_{\{k+n-2\}}, \ldots, y_k\right), \tag{2.3.1}$$

onde F é uma função bem definida de seus argumentos.

Para Mickens (2015), uma equação de diferença comum é uma relação da forma dada por equação (2.3.1) acima e, em geral, espera-se que ocorram equações de diferença sempre que o sistema em estudo depende de uma ou mais variáveis que podem assumir apenas um conjunto discreto de valores possíveis. Além disso, Yamane (1994) lembra que as equações a diferenças podem ser definidas de modo semelhante às equações diferenciais.

Considerando um exemplo em Mickens (2015), o autor sugere uma equação diferencial na forma

$$\frac{dy}{dt} = f(y, t), \tag{2.3.2}$$

onde f é uma função que dependem de y e t, e não pode ser integrada na forma fechada, em termos de funções elementares. Para continuar o procedimento, o mesmo autor faz uso de um esquema simples para determinação de uma solução numérica.

Em primeiro lugar, considera-se um $t_k = (\Delta\, t)k$, onde o Δt é um intervalo fixado em t e, k, um conjunto de inteiros. Em seguida, substitui-se a derivada em (2.3.2) por uma aproximação, levando a

$$\frac{dy(t)}{dt} \rightarrow \frac{y(t+\Delta t)-t(t)}{\Delta t} = \frac{y_{k+1}-y_k}{\Delta}, \tag{2.3.3}$$

Onde y_k é uma aproximação para a solução exata da equação (2.3.2), quando $t = t_k$. Ou seja,

$$y_k \cong y(t_k). \tag{2.3.4}$$

Assim, fechando a apresentação, é feita a substituição de $f(y,t) \rightarrow f[y_k, (\Delta t)k]$ na equação (2.3.2), levando ao resultado conhecido como Método de Euler

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta t} = f[y_k, (\Delta t)k] \tag{2.3.5}$$

$$y_{k+1} = y_k + (\Delta t)\, f[y_k, (\Delta t)k]. \tag{2.3.6}$$

Focando especificamente na forma geral de uma equação em diferenças linear de primeira ordem, podemos considerar a seguinte especificação

$$y_{k+1} - p_k y_k = \ q_k, \tag{2.3.7}$$

onde p_k e q_k são funções e, caso $q_k = \ 0$, a equação (2.3.7) se torna homogênea, tendo sua solução geral composta de uma solução da equação homogênea e qualquer solução particular da equação não homogênea.

Ainda considerando a equação (2.3.7) acima, para caminharmos em direção de uma formulação de solução geral, é comum estabelecer um valor inicial para y_1. Isto posto, podemos ver que

$$\begin{gathered} y_2 = p_1 y_1 \\ y_3 = p_2 y_2 \\ \vdots \\ y_{k-1} = p_{k-2} y_{y-2} \\ y_k = p_{k-1} y_{k-1}, \end{gathered} \tag{2.3.8}$$

cuja generalização culmina em

$$\begin{gathered} y_k = y_1 p_1 p_2 p_3 \cdots p_{k-2} p_{k-1} \\ y_k = y_1 \prod_{i=1}^{k-1} p_i. \end{gathered} \tag{2.3.9}$$

Lembrando que y_1 pode receber um valor arbitrário, isso nos leva a reconhecer a equação (2.3.9) como a solução geral da equação (2.3.7).

Na situação de a equação (2.3.7) não ser homogênea, Mickens (2015) inicia o procedimento para encontrar a solução dividindo ambos os lados da equação por $\prod_{i=1}^{k} p_i$. Assim, teremos:

$$
\begin{aligned}
y_{k+1}\cdot\left(\prod_{i=1}^{k}p_i\right)^{-1} - p_k y_k\cdot\left(\prod_{i=1}^{k-1}p_i\right)^{-1} &= q_k\cdot\left(\prod_{i=1}^{k}p_i\right)^{-1}\\
\Delta\left[y_k\left(\prod_{i=1}^{k}p_i\right)^{-1}\right] &= q_k\cdot\left(\prod_{i=1}^{k}p_i\right)^{-1}\\
\left[y_k\left(\prod_{i=1}^{k}p_i\right)^{-1}\right] &= \Delta^{-1}\left[q_k\cdot\left(\prod_{i=1}^{k}p_i\right)^{-1}\right]\\
y_k &= \left(\prod_{i=1}^{k-1}p_i\right)\sum_{i=1}^{k-1}\left[q_i\cdot\left(\prod_{r=1}^{i}p_r\right)^{-1}\right].
\end{aligned}
\tag{2.3.10}
$$

Assim, a solução geral da equação (2.3.7) será a soma da solução homogênea e particular

$$
y_k = A\prod_{i=1}^{k-1}p_i + \left(\prod_{i=1}^{k-1}p_i\right)\sum_{i=1}^{k-1}\left[q_i\cdot\left(\prod_{r=1}^{i}p_r\right)^{-1}\right], \tag{2.3.11}
$$

com A sendo uma constante arbitrária.

2.4. Contexto da análise matemática do fenômeno econômico

Pensadas como ferramentas, tanto as equações diferenciais como as equações a diferenças podem ajudar na avaliação de um dos conceitos econômicos mais amplamente utilizados na análise moderna do problema da inflação e do desemprego, conhecido como Curva de Phillips (CHIANG & WAINWRIGHT, 2006). Segundo estes autores, em sua formulação original, essa relação retrata uma relação negativa obtida empiricamente entre a taxa de crescimento da renda salarial e a taxa de desemprego. A partir desta constatação, é possível estruturar modelos de equações no tempo discreto e contínuo.

Ao longo da história do pensamento econômico (doravante HPE), a análise econômica fez uso do ferramental estático, principalmente para fins didáticos. Em um modelo estático, o problema, em termos gerais, é encontrar os valores das variáveis endógenas que satisfaçam alguma condição de equilíbrio especificada e, aplicado ao contexto de modelos de otimização, a tarefa passaria à busca de valores das variáveis que maximizem ou minimizem uma função-objetivo, considerando a condição de primeira ordem, como condição de equilíbrio (CHIANG & WAINWRIGHT, 2006).

Por sua vez, quando se trata de modelos dinâmicos, os problemas envolvem o esboço de trajetórias temporais de alguma variável, tendo como base um padrão de variação conhecido (CHIANG & WAINWRIGHT, 2006). Da mesma forma, os autores supracitados dão um passo a mais na explicação do que seria uma dinâmica, para tratar os fenômenos em economia. Eles relatam que o termo dinâmica, aplicado à análise econômica, recebeu diferentes conotações ao longo da HPE e, mais recentemente, passou a ser referência no tipo de análise que busca determinar se, dado um tempo suficiente, as variáveis envolvidas tenderão a convergir para certos valores que possivelmente podem chegar ao equilíbrio.

O que torna este tipo de análise mais notável, continuam Chiang & Wainwright (2006), é que a análise dinâmica destaca a datação das variáveis, pondo em evidência a consideração do tempo. Assim, tal fato pode ser visto de duas formas, o tempo também é considerado como variável contínua ou mesmo discreta, levando a outras formas de análise. Por exemplo, no tempo contínuo, alguma coisa está acontecendo com a variável em cada ponto no tempo, tal como acontece com a taxa de juros compostos contínuos, ao passo que, vendo o tempo no aspecto discreto, a variável sofre uma variação apenas uma vez dentro de um intervalo de tempo. Chiang & Wainwright (2006) complementam que um desses conceitos de tempo pode ser mais adequado que o outro, dependendo do contexto experimentado.

2.5. A teoria macroeconômica por trás do fenômeno

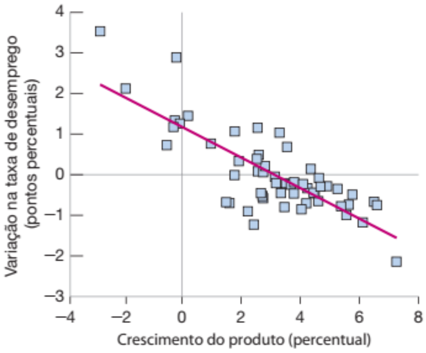
Os modelos econômicos sugeridos, estudados e experimentados empiricamente, ao longo dos anos, em diferentes nações, partiram da intuição do pensador econômico. Os resultados dos estudos e experimentos fizeram parte do ferramental de política econômica dos países e formaram bases metodológicas para que mais testes fossem realizados.

Blanchard (2017) levanta uma questão importante ao trazer à luz as três dimensões da atividade econômica agregada, quais sejam, o crescimento do produto, a taxa de desemprego e a taxa de inflação, e mostra como estas variáveis econômicas dão sustentação ao surgimento da Lei de Okum[4]. Com mostra o autor, a intuição

[4] Arthur Okun foi uma economista estadunidense e conselheiro do presidente John F. Kennedy na década de 1960 (Blanchard, 2017, p.58).

sugere que, se o crescimento do produto for elevado, o desemprego será reduzido, e que este fato tem uma verdade econômica lógica. Essa relação ficou conhecida como a lei de Okun mas, na verdade, a lei a que se referem os textos é uma regularidade empírica.

Figura 1: Variações na taxa de desemprego versus crescimento nos Estados Unidos, 1960-2014.



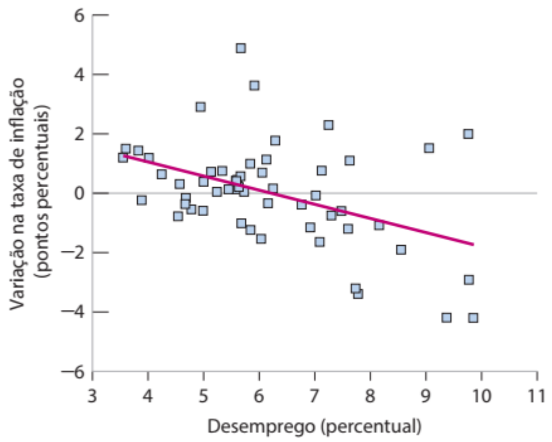
Fonte: Blanchard, 2017.

Como se pode ver na Figura 1, acima, as coordenadas coletadas formam uma nuvem de pontos que acompanham as dimensões das variáveis crescimento do PIB e variação da taxa de desemprego. Como bom observador e com treinamento matemático, Okum percebeu a correlação e a possiblidade de fazer um ajuste de regressão sobre a nuvem, cuja linha de regressão é negativamente inclinada. Isto foi o suficiente para se tirar algumas conclusões. Por exemplo, que havia uma estreita relação entre as duas variáveis: maior crescimento do produto leva a uma diminuição do desemprego e que, por isso, o desemprego aumenta nas recessões e diminui nas expansões, implicando que a chave para reduzir o desemprego é uma taxa de crescimento suficientemente elevada (BLANCHARD, 2017).

Outra constatação importante é que a linha de regressão aplicada à nuvem de pontos atravessa o eixo horizontal no ponto em que o crescimento do produto é aproximadamente igual a 3%. Economicamente falando, é necessário que uma taxa de crescimento se mantenha neste patamar para que o desemprego se estabilize, o que pode ocorrer por duas razões. Segundo Blanchard (2017), a primeira é que a população, e assim a força de trabalho, aumenta ao longo do tempo, de modo que o emprego deve crescer ao longo do tempo apenas para manter constante a taxa de desemprego. A segunda é que o produto por trabalhador também se eleva com o tempo, o que implica que o crescimento do produto é superior ao crescimento do emprego. Então, pode-se concluir que o crescimento do produto deve ser igual a 3% apenas para manter constante a taxa de desemprego (BLANCHARD, p.59, 2017).

No mesmo sentido, a conhecida Lei de Okun implica que, com um crescimento suficientemente forte, é possível reduzir o desemprego a níveis muito baixos. Entretanto, como continua Blanchard (2017), a intuição sugere que, quando o desemprego diminui muito, a economia tende a superaquecer, provocando uma pressão ascendente sobre a inflação, corroborando, em grande medida, com mais uma verdade econômica lógica. Percebido este fato, essa relação foi explorada e se tornou conhecida como a Curva de Phillips[5], que traça a taxa de inflação contra a de desemprego. Desde então, a Curva de Phillips foi redefinida como uma relação entre a variação da taxa de inflação e a taxa de desemprego (BLANCHARD, p.59, 2017).

Figura 2: Variações na taxa de inflação versus a taxa de desemprego nos Estados Unidos, 1960-2014.



Fonte: Blanchard, 2017.

Dada a devida atenção à Figura 2, é possível chegarmos a mais duas conclusões: a linha de regressão desenhada na nuvem de pontos ainda tem inclinação negativa, mas não se apresenta tão íngreme quanto no caso da ocorrência da Lei de Okum. Entretanto, ainda é possível dizer que, em média, o desemprego mais elevado leva a uma diminuição da inflação e que uma taxa de desemprego menor estimula um aumento da inflação, uma verdade lógica econômica que só pode ser corroborada acontecendo em um patamar médio, porque a literatura macroeconômica tem mostrado casos em que uma alta taxa de desemprego vem associada a alta da inflação (BLANCHARD, 2017).

[5] Esta relação foi percebida pela primeira vez em 1958 pelo economista da Nova Zelândia A. W. Phillips.

O segundo ponto a ser observado, continua o autor, é que a linha atravessa o eixo horizontal no ponto em que a taxa de desemprego é de aproximadamente 6%, implicando dizer que quando o desemprego fica abaixo dos 6%, a inflação tem aumentado, sugerindo que a economia pudesse estar superaquecida, operando acima de seu potencial. Além disso, quando o desemprego se apresentava acima daquele patamar, a inflação tinha diminuído, sugerindo que a economia operava abaixo do potencial. Por isso, conclui o autor, a relação não se fazia suficientemente firme para que a taxa de desemprego em que a economia sofria superaquecimento pudesse ser fixada precisamente (BLANCHARD, p.60, 2017).

2.6. Tratamento matemático de modelos da curva de Phillips

Como foi esclarecido, a Curva de Phillips, na verdade, é uma “relação” estabelecida entre a taxa de inflação e a taxa de desemprego[6]. Originalmente, tal relação confronta a taxa de crescimento da renda salarial e a taxa de desemprego, encontrando uma relação negativa empírica. Economicamente, temos que

$$w = f(U) \quad com \quad f'(U) < 0, \qquad (2.6.1)$$

onde w denota a taxa de crescimento da renda salarial W, com $w = \dot{W}/W$ e U sendo a taxa de desemprego, o que nos força a anunciar que esta relação pertence à construção econômica chamada mercado de trabalho.

Nesta construção, Chiang & Wainwright (2006) adapta a relação de Phillips para uma função que liga a taxa de inflação à taxa de desemprego, configuração justificada pelo fato de a remarcação de preços ser amplamente utilizada, de modo que, quando $w > 0$, vai refletir o custo crescente da renda salarial acarretando, necessariamente, implicações inflacionárias. Assim, este fato faria da taxa de inflação, assim como w, uma função de U.

Da mesma forma, pressões inflacionárias para quando $w > 0$ podem ser compensadas por um aumento na produtividade do trabalho, T, que vai ser admitida como exógena. Além disso, o efeito inflacionário pode se materializar somente até o ponto em que a renda salarial crescer mais rapidamente do que a produtividade (CHIANG & WAINWRIGHT, 2006).

[6] Phillips, A. W. The relationship between unemployment and the rate of change of money wages in the United Kingdom, 1861-1957. Economica, p. 283-299, nov. 1958.

Dessa feita, considerando a taxa de crescimento do nível geral de preços, P, por p, isto é $p \equiv \dot{P}/P$, teremos a seguinte notação

$$p = w - T. \qquad (2.6.2)$$

A primeira forma da Curva de Phillips que será considerada é a combinação da Equação (2.6.1) na Equação (2.6.2), feita pela adoção da versão linear da função $f(U)$. Tal adaptação decorre que

$$p = \alpha - \ w - \beta T, \qquad (2.6.3)$$

com $\alpha, \beta > 0$.

Considerando, agora, a versão da curva de Phillips com expectativas aumentadas, isso implica um acréscimo do termo π^e, como a taxa de inflação esperada, à Equação (2.6.3). Esta proposta foi implementada por Friedman (1968), o qual identificou que, se uma tendência inflacionária se mantiver em efeito por um tempo suficiente, as pessoas estarão propensas a formar certas expectativas de inflação que, então, tentam incorporar às demandas de renda salarial (CHIANG & WAINWRIGHT, p. 511, 2006). Assim,

$$w = f(U) + g\pi^e. \qquad (2.6.4)$$

Pensado à forma de Friedman (1968), também $w = f(\pi)$ e, incluindo na Equação (2.6.3), a nova especificação se torna

$$p = \alpha - \ w - \beta U + \ g\pi^e, \qquad (2.6.5)$$

sendo que $0 < g \leq 1$.

O fato de introduzirmos uma nova variável à equação força-nos a propor hipóteses sobre como as expectativas de inflação são especificamente formadas, lembra Chiang & Wainwright (2006), obrigando a adoção da hipótese das expectativas adaptativas, traduzida pela equação

$$\frac{d\pi^e}{dt} = j(p - \pi^e), \qquad (2.6.6)$$

com que $0 < j \leq 1$, que descreve o padrão de variação da grandeza π ao longo do tempo. Aqui, é importante perceber que, se $p > \pi^e \Rightarrow \frac{d\pi^e}{dt} > 0$. Reciprocamente, se p ficar abaixo de π^e, então π^e é revisada na direção da redução.

Considerando, neste ponto, o retorno da inflação para o desemprego por meio e uma política monetária, Chiang & Wainwright (2006) denotam o equilíbrio da moeda nominal por M e sua taxa de crescimento por $m \equiv \dot{M}/M$. Assim, teremos que

$$\frac{dU}{dt} = -k(m-p), \quad (2.6.7)$$

com $k > 0$ e lembrando que, da mesma forma, a expressão $(m-p)$ representa a taxa de crescimento da moeda real, chagamos a

$$m - p = \frac{\dot{M}}{M} - \frac{\dot{P}}{P} = r_M - r_P = r_{\left(\frac{M}{P}\right)}. \quad (2.6.8)$$

Com isso, fica evidenciado que a Equação (2.6.7) estabelece que dU/dt se relaciona negativamente com a taxa de crescimento do equilíbrio de moeda real.

Para retratar a trajetória temporal de π^e, Chiang & Wainwright (2006) mostram que as Equações (2.6.5), (2.6.6) e (2.6.7) constituem um modelo fechado nas variáveis taxa de inflação esperada, π^e, taxa de crescimento do nível geral de preços, p, e taxa de desemprego, U. Mas, caso duas, das três variáveis fossem eliminadas, seria possível aglutiná-las no mesmo modelo, formando uma única equação diferencial de uma variável. Focando em π^e, os autores procedem com a substituição da Equação (2.6.5) na (2.6.6) para obter

$$\frac{d\pi^e}{dt} = j(\alpha - w - \beta U) - j(1-g)\pi^e. \quad (2.6.9)$$

Agora, é preciso criar o termo dU/dt, diferenciando-se a Equação (2.6.9) em relação a t, surgindo assim a expressão, no resultado da operação. Assim,

$$\frac{d^2\pi^e}{dt^2} = -j - \beta\frac{dU}{dt} - j(1-g)\frac{d\pi^e}{dt}. \quad (2.6.10)$$

Fazendo-se a inclusão da Equação (2.6.7) nesta última, resulta em

$$\frac{d^2\pi^e}{dt^2} = -j\beta km - j\beta kp - j(1-g)\frac{d\pi^e}{dt}. \quad (2.6.11)$$

Ainda temos o inconveniente da persistência da variável p, que precisa ser eliminada. Com isso, é importante lembrar que, da Equação (2.6.7), uma manipulação algébrica ajuda a chegamos em

$$p = \frac{1}{j}\frac{d\pi^e}{dt} + \pi^e \,. \qquad (2.6.12)$$

Dessa forma, após algumas substituições nas equações, temos a equação diferencial desejada dependendo apenas da variável π^e, com a seguinte especificação

$$\frac{d^2\pi^e}{dt^2} + \underbrace{[\beta k + j(1-g)]}_{\alpha_1}\frac{d\pi^e}{dt} + \underbrace{(j\beta k)}_{\alpha_2}\pi^e = \underbrace{j\beta km}_{\beta}. \qquad (2.6.11)$$

Tendo a Equação (2.6.11) posta, a solução particular é dada por

$$\pi^e_{part} = \frac{\beta}{\alpha_2} = \frac{j\beta km}{j\beta k} = m, \qquad (2.6.12)$$

o que implica dizer que o valor do equilíbrio intertemporal da taxa de inflação esperada depende, exclusivamente, da taxa de crescimento da moeda nominal. Além disso, como se sabe

$$\mathrm{r}_1, r_2 = \frac{1}{2}\left(-\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_2}\right), \qquad (2.6.13)$$

com $\alpha_1, \alpha_2 > 0$. Ponto importante mencionado por Chiang & Wainwright (2006) é que todos os três casos de raízes características podem surgir, quais sejam, raízes distintas, raízes reais repetidas ou raízes complexas. De toda forma, concluem, o equilíbrio intertemporal revelará ser dinamicamente estável.

No tempo discreto, o mesmo pode ser apresentado como um modelo de equações em diferenças, utilizando as mesmas pressuposições e hipóteses do modelo econômico. Assim, a relação de Phillips com expectativas aumentadas, o modelo com expectativas adaptativas e a política monetária, formam o conjunto de três equações

$$p_t = \alpha - T - \beta U_t + g\pi_t^e, \quad [\alpha, \beta >; 0 < g \leq 1] \qquad (2.6.14)$$

$$\pi_{t+1}^e - \pi_t^e = j(p_t - \pi_t^e), \quad [0 < j \leq 1] \qquad (2.6.15)$$

$$U_{t+1} - U_t = -k(m - p_{t+1}), \quad [k > 1], \qquad (2.6.16)$$

equações tais que compõem a nova versão do modelo que relaciona inflação e desemprego.

Com isso, procedendo a análise, temos que tomar a primeira diferença de p_t, segundo o qual

$$\Delta p_t \equiv p_{t+1} - p_t$$
$$p_{t+1} = \alpha - T - \beta U_{t+1} + g\pi^e_{t+1}. \qquad (2.6.17)$$

Isto faz com que a Equação (2.6.14) se torne

$$p_{t+1} - p_t = -\beta(U_{t+1} - U_t) + g\pi^e_{t+1} \qquad (2.6.18)$$

$$p_{t+1} - p_t = \beta k(m - p_{t+1}) + gj(p_t - \pi^e_t). \qquad (2.6.19)$$

Além disso,

$$g\pi^e_t = p_t - (\alpha - T) + \beta U_t, \qquad (2.6.20)$$

que, fazendo a substituição, teremos

$$(1 - \beta k)p_{t+1} - [1 - j(1 - g)]p_t + j\beta U_t = \beta km\ j(\alpha - T). \qquad (2.6.21)$$

Para eliminar U_t, calculamos a diferença na Equação (2.6.21), para obtermos o termo $(U_{t+1} - U_t)$ e utilizá-lo na Equação (2.6.16), o que nos leva à Equação de diferenças apenas na variável p, assumindo a especificação

$$p_{t+2} - \underbrace{\frac{1 + gj + (1 - j)(1 + \beta k)}{1 + \beta k}}_{\alpha_1} p_{t+1} + \underbrace{\frac{1 - j(1 - g)}{1 + \beta k}}_{\alpha_2} p_t = \underbrace{\frac{j\beta km}{1 + \beta k}}_{c}. \qquad (2.6.22)$$

Em relação à trajetória temporal de p, o valor de equilíbrio intertemporal será dado pela solução particular da Equação (2.6.22), isto é

$$\bar{p} = \frac{c}{1 + \alpha_1 + \alpha_2} = \frac{j\beta km}{\beta kj} = m, \qquad (2.6.23)$$

que, assim como foi visto no modelo em tempo contínuo, a taxa de equilíbrio da inflação é exatamente igual à taxa de expansão monetária. Completando a análise, dependendo das grandezas relativas de $\alpha_1^2\ e\ 4\alpha_2$,

$$\alpha_1^2 \gtreqless 4\alpha_2 \Leftrightarrow [1 + gj + (1-j)(1+\beta k)]^2 \gtreqless 4[1 - j(1-g)](1+\beta k). \quad (2.6.24)$$

Em relação à trajetória temporal de U, da taxa de desemprego, precisamos fazer uma série de substituições. Assim,

$$(1+\beta k)U_{t+1} - U_t = k(\alpha - T - m) + kg\pi_{t+1}^e, \qquad (2.6.25)$$

$$(1+\beta k)U_{t+2} - (2+\beta k)U_{t+1} + U_t = kg(\pi_{t+2}^e - \pi_{t+1}^e), \qquad (2.6.26)$$

$$(1+\beta k)U_{t+2} - (2+\beta k)U_{t+1} + U_t = kgj(p_{t+1} - \pi_{t+1}^e). \qquad (2.6.27)$$

Lembrando que, pela Equação (2.6.16),

$$kp_{t+1} = U_{t+1} - U_t + km, \qquad (2.6.28)$$

também é possível manejar a equação (2.6.16) pela multiplicação por $(-kj)$ todos os termos, inclusive deslocando à frente o índice no tempo. Dessa forma, teremos que

$$\begin{aligned} -kjg\pi_{t+1} &= -kjp_{t+1} + kj(\alpha - T) - \beta kjU_{t+1} \\ &= -j(U_{t+1} - U_t + km) + kj(\alpha - T) - \beta kjU_{t+1} \qquad (2.6.29) \\ &= -j(1+\beta k)U_{t+1} + jU_t + kj(\alpha - T - m). \end{aligned}$$

É visível que este último resultado expressa p_{t+1} e π_{t+1}^e em termos de U, permitindo-nos obter a equação de diferenças apenas na variável da taxa de desemprego. Assim,

$$U_{t+2} - \underbrace{\frac{1 + gj + (1-j)(1+\beta k)}{1+\beta k}}_{\alpha_1} U_{t+1} + \underbrace{\frac{1 - j(1-g)}{1+\beta k}}_{\alpha_2} U_t = \underbrace{\frac{kj[\alpha - T - (1-g)m}{1+\beta k}}_{d}. \quad (2.6.30)$$

É possível identificar, nesta última equação, que o resultado é praticamente idêntico à versão diferencial, embora o termo constante seja diferente, fazendo com que as soluções particulares sejam diferentes. Neste caso, é importante que o resultado, de fato, seja diferente, porque não há nenhuma razão inerente para esperar que a taxa de equilíbrio intertemporal do desemprego seja a mesma que a taxa de equilíbrio da inflação (CHIANG & WAINWRIGHT, 2006).

Por fim, também é possível destacar que a taxa de equilíbrio intertemporal do desemprego é dada por

$$\bar{U} = \frac{1}{\beta}[\alpha - T - (1-g)m], \qquad (2.6.31)$$

e, também, que a taxa de equilíbrio da inflação é $\bar{p} = m$, podendo-se ligar, desta forma, $\bar{U}$ a $\bar{p}$ pela equação

$$\bar{U} = \frac{1}{\beta}[\alpha - T - (1-g)\bar{p}]. \qquad (2.6.32)$$

Estes fatos são destacados por Chiang & Wainwright (2006) como de suma importância, pois essa equação diz respeito às taxas de equilíbrio de desemprego e inflação, representando uma relação de Phillips de longo prazo.

3. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho buscou fazer uso do arsenal disponibilizado pelas equações diferenciais e em diferenças como poderosos instrumentos para explicar fenômenos econômicos. Teve como objetivo principal utilizar os elementos de matemática necessários para analisar um fenômeno importante na teoria macroeconômica, que relaciona taxa de desemprego e inflação, a conhecida Curva de Phillips.

Utilizou-se uma metodologia de pesquisa cuja finalidade foi aplicar e explorar conceitos teóricos da matemática pura em modelos econômicos nascidos da intuição empírica. Assim, procedeu-se à coleta de dados através de um levantamento bibliográfico, de natureza quantitativa, revelando o caráter interdisciplinar e prático, destacando a importância pragmática do esforço do trabalho.

Ao apresentar, em sequência, os conceitos e definições sobre as equações diferenciais, buscou-se revelar as bases teóricas mínimas para que se pudesse extrair os elementos aptos a serem utilizados nas análises seguintes. Os métodos de solução básicos de uma EDO de primeira e segunda ordem foram imprescindíveis para alçar o necessário, tanto para facilitar a apresentação das equações de diferenças que foram utilizadas, quanto para suas aplicações nos modelos macroeconômicos porque, como foi ressaltado no início da exposição, bastariam equações de ordem menores para dar amparo aos modelos teóricos.

Modelos em economia tem respaldo teórico na história do pensamento econômico e foi indispensável a contextualização do fenômeno em estudo. Isto mostra uma peculiaridade do fazer econômico que, embora se utilizem de ferramentas diversas, a modelagem se deu e, ainda se vale, de intuição e experiência sobre o fenômeno para que o objeto de estudo seja testado, verificado e convalidado para alguma tomada de decisão.

O tratamento matemático, utilizando as ferramentas das equações dinâmicas, na análise do fenômeno econômico da relação de Phillips foi precedido de análise estatística, que estimou uma regressão sobre pontos de coordenadas, cruzando duas variáveis. Mas, percebeu-se durante toda a análise que, quando os dados são insuficientes ou ausentes para utilização de uma análise macroeconométrica, o poder da determinação do equilíbrio dinâmico revela a vantagem de uma análise via equações diferenciais e em diferenças, sejam elas determinísticas ou estocásticas.

REFERÊNCIAS

BLANCHARD, Olivier. *Macroeconomia*. tradução Sônia Midori Yamamoto. 7ª ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2017.

CHIANG, Alpha. WAINWRIGHT, Kevin. *Matemática para economistas*. [Tradução da 4ª Ed – 10ª Reimpr.]. Rio de Janeiro: Elsevier, 2006.

FRIEDMAN, Milton. The role of monetary policy. *American Economic Review*, p. 1-17, mar. 1968.

GIL, Antônio Carlos. *Como elaborar projetos de pesquisa*. 6. Ed. [3. Reimpr.]. São Paulo: Atlas, 2019.

KELLEY, Walter G. PETERSON, Allan C. *Difference Equations: An Introduction with Applications*. 2nd Ed. San Diego – USA: Harcourt/Academic Press, 2001.

MEDEIROS, João Bosco. *Redação científica*: prática de fichamentos, resumos, resenhas. 13. Ed. São Paulo: Atlas, 2019.

MICKENS, Ronald E. *Difference Equations: Theory, Applications and Advanced Topics*. 3rd Ed. Boca Raton – FL: Taylor & Francis Group LLC, 2015.

PHILLIPS, A. W. The relationship between unemployment and the rate of change of money wages in the United Kingdom, 1861-1957. *Economica*, p. 283-299, nov. 1958.

SIMONSEN, Mario Henrique. *Dinâmica macroeconômica*. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil,1983.

YAMANE, Taro. *Matemática para economistas*. 1ª tradução em português. 1ª reimpressão. Rio de Janeiro: Atlas, 1972.

ZILL, Denis G. CULLEN, Michael R. *Equações Diferenciais*, Volume 1. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001.