A DERIVADA COMO TAXA DE VARIAÇÃO E ALGUMAS DE SUAS APLICAÇÕES ENVOLVENDO PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO

Silva Santos, Rhuan Cristian da

Padilha, Eliandro

RESUMO

Este texto foi escrito com o objetivo de ser uma pequena introdução ao estudo das derivadas como taxas de variação, e a sua aplicação na otimização de funções. Há nele uma pequena introdução demonstrando algumas regras de derivação e algumas derivadas imediatas que são mais utilizadas no estudo do cálculo. Após isso passa-se a ver como a derivada pode ser interpretada como taxa de variação. Há também uma pequena introdução ao estudo de otimização de funções e como as derivadas auxiliam neste processo que é de vital importância para a sociedade. Para demonstrar os conteúdos assimilados foram elaborados dois exemplos práticos de otimização de funções. Este texto foi construído tendo como base a análise bibliográfica de material de estudo de Cálculo Diferencial e Integral e o site do professor Dr. Edson Agustini, professor do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Uberlândia. Nas considerações finais foi deixado um pouco sobre o que como foi a experiência de redigir este texto e o que foi assimilado do seu conteúdo.

Palavras-chave: Funções. Derivadas. Otimização. Taxa de variação.

1 - INTRODUÇÃO

O Cálculo diferencial e integral apresenta diversas ferramentas que nos ajudam a compreender melhor vários fenômenos matemáticos envolvidos em diversas situações simples que são vivenciadas rotineiramente. Dessas ferramentas, o estudo das derivadas tem se mostrado extremamente eficiente para auxiliar na compreensão das taxas de variação e otimização de problemas das mais diversas áreas.

O estudo das taxas de variação tem diversas aplicações nas áreas de formação acadêmicas, em soluções financeiras, engenharias e em variadas outras áreas do desenvolvimento humano. Ele é de vital importância para compreendermos como os fenômenos se desenvolvem mediante a alteração de alguma de suas variáveis.

Também relacionado temos a otimização que é parte fundamental em qualquer tipo de análise, seja ela financeira, logística, mercadológica, matemática, médica, física, entre outras. Os problemas de otimização se fazem presentes em todos os aspectos da sociedade atual.

Neste texto disserto um pouco sobre como a derivada pode ser interpretada como taxa de variação de funções e como ela pode ser utilizada no auxílio de problemas de otimização. Inicialmente apresento métodos de derivação para demonstrar algumas das ferramentas necessárias para o cálculo das mais diversas derivadas. Após isso vemos como as derivadas são interpretadas como taxas de variação e como elas são utilizadas na otimização de funções.

Este texto tem como objetivos:

- Demonstrar como as derivadas são compreendidas como taxas de variação;
- Uma breve explicação sobre o cálculo de derivadas, suas regras e alguns de seus teoremas;
- Como utilizá-la para encontrar máximos e mínimos de funções;
- Analisar duas situações hipotéticas de uso das derivadas em otimização de funções.

2 - A DERIVADA COMO TAXA DE VARIAÇÃO

O que significa dizer que a derivada de uma função é uma taxa de variação, qual é a relação existente entre o ato de derivar uma função e dizer que ela é uma taxa de variação. Vejamos o que o professor Dr. Edson Agustini diz:

> Há aplicações mais voltadas para a própria Matemática, como o traçado rigoroso de gráficos de funções reais de uma variável real,(...). Mas há também aplicações mais voltadas para as Ciências Aplicadas, como os importantes problemas envolvendo as chamadas taxas de variações e os problemas de otimização, nos quais se busca maximizar ou minimizar uma função que modela matematicamente determinada situação ou problema prático. (AGUSTINI, 2020, p. 113).

A taxa de variação T de uma função f qualquer pode ser encontrada analisando qual a variação nos valores da referida função dentro de um determinado intervalo [a, b] do seu domínio. O seu cálculo pode ser dado por:

$$T = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Segundo Fleming e Gonçalves (2006) "Toda derivada pode ser interpretada como uma taxa de variação. A interpretação da derivada como uma razão de variação tem aplicações práticas nas mais diversas ciências". Podemos ver problemas envolvendo taxas de variação em várias áreas de interesse humano, na física podem nos dar informações a respeito do movimento, o decaimento radioativo na química é dado pela taxa de variação dos isótopos de um determinado elemento, na biologia podemos ver a taxa de crescimento ou decrescimento de colônias de bactérias, fungos ou vírus, na economia temos a análise de custos, lucros ou juros que também são taxas de variação.

> As taxas de variação ocorrem em todas as ciências. Um geólogo se interessa em saber a taxa na qual uma massa de rocha fundida resfria através da condutividade térmica com o meio rochoso que a envolve. Um engenheiro quer saber a taxa segundo a qual a água flui para dentro ou para fora de um reservatório; um geógrafo está interessado na taxa de variação da densidade populacional em uma cidade à medida que aumenta a distância de seu centro; um meteorologista está interessado na taxa de variação da pressão atmosférica em relação à altura.
> (STEWART, 2006 .p. 206)

O cálculo da derivada de uma função é dado pela resolução dos seguintes limites, sendo que o primeiro é referente ao cálculo da taxa de variação média e o segundo é referente ao cálculo da taxa de variação instantânea:

$$\lim_{x \to \Delta x} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \, ou \lim_{x \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Segundo Agustini (2020), "De modo geral, a taxa de variação instantânea (ou taxa de crescimento/decrescimento) de uma função f : X ⊂ R → R. em relação a sua variável, em um ponto x ∈ X é dada pela derivada de f em x, ou seja, fo(x) caso a derivada exista".

Assim fica entendido então que o cálculo de uma derivada nada mais é do que e o cálculo do limite da taxa de variação de uma função qualquer, quando esta se aproxima de 0.

2.1 - ALGUMAS REGRAS DE DERIVAÇÃO

A derivada é entendida como a inclinação da reta tangente a uma curva em um dado ponto desta curva. A derivação de funções obedece a algumas regras e segue alguns teoremas, abaixo listo alguns deles tomando h(x), f(x) e g(x) como funções deriváveis:

1 – Toda função derivável num ponto x é contínua nesse ponto;

2 – A derivada da soma ou da subtração de duas funções é igual à soma ou subtração de suas respectivas derivadas, ou seja:

$$h(x) = f(x) \pm g(x) \Rightarrow h'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$

3 – A derivada do produto de duas funções é a soma dos produtos da derivada de uma pela outra:

$$h(x) = f(x).g(x) \Rightarrow h'(x) = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$$

4 – A derivada do quociente de duas funções é a subtração dos produtos da derivada de uma pela outra dividido pelo quadrado da segunda função:

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow h'(x) = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}$$

5 – A derivada de uma função composta será dada pela regra da cadeia que é o produto da derivada da primeira função aplicada na segunda função com a derivada da segunda função:

$$h(x) = g[f(x)] \Rightarrow h'(x) = g'[f(x)].f'(x)$$

Essas são algumas das principais regras de derivação, abaixo segue uma tabela contendo algumas das derivadas mais utilizadas no cálculo e que tem o seu cálculo feito de forma meio que imediata seguindo algumas das regras e teoremas ditos acima, sendo *c* constante, *a* e *n* valores quaisquer e *f(x)* uma função derivável:

$$f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$$
$$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$$
$$f(x) = c.x \Rightarrow f'(x) = c.x'$$
$$f(x) = x^n, (n \neq 0) \Rightarrow f'(x) = n.x^{(n-1)}.x'$$
$$f(x) = a^x, (a > 0, a \neq 1) \Rightarrow f'(x) = a^x.ln(a).x'$$
$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x.x'$$
$$f(x) = sen(x) \Rightarrow f'(x) = cos(x)$$
$$f(x) = cos(x) \Rightarrow f'(x) = -sen(x)$$
$$f(x) = tan(x) \Rightarrow f'(x) = sec^2(x)$$
$$f(x) = cotg(x) \Rightarrow f'(x) = -cossec^2(x)$$
$$f(x) = sec(x) \Rightarrow f'(x) = tan(x).sec(x)$$
$$f(x) = cossec(x) \Rightarrow f'(x) = -cossec(x).cotg(x)$$
$$f(x) = ln(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$
$$f(x) = \log_a(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x.\ln(a)}$$

2.2 - USANDO A DERIVADA PARA OTIMIZAR FUNÇÕES

A otimização de funções é de vital importância em vários procedimentos atuais. As análises feitas com a intenção de otimizar variáveis se fazem presentes nas mais diversas áreas do conhecimento. Uma das áreas mais lembradas que fazem uso dos procedimentos de otimização é a econômica. Projeções de vendas, análises de custo, lucro, faturamento e produção estão intimamente ligadas ao estudo de otimização de funções.

> As ferramentas de cálculo diferencial nos dão condições de analisar, de maneira completa, o comportamento gráfico de uma função. Essa habilidade é extremamente importante, uma vez que pode servir de embasamento para a tomada de decisões nas mais variadas situações. (FACCIN, 2015, p. 101)

Os pontos de máximo e mínimo locais de funções deriváveis podem ser encontrados utilizando os testes de derivada primeira e segunda, sendo este o teorema que nos dá o teste da derivada primeira:

Teorema 1: Seja f uma função derivável em p, em que p é um ponto interior ao domínio de f. Uma condição necessária para que p seja ponto de máximo ou de mínimo local é que $f'(p) = 0$.

Este teorema explicita o que vem a ser o teste da derivada primeira. Esta ferramenta é de grande auxilio para encontrar pontos de máximo ou mínimo locais, sendo ele realizado conforme os pontos abaixo:

1 – Encontrar a derivada $f'(x)$ da função f que se pretende analisar;

2 – Encontrar os pontos críticos da derivada da função f dentro do intervalo [a, b] que se quer analisar, ou seja, os pontos onde $f'(x)=0$ ou não exista $f'(x)$;

3 – Analisar o entorno dos pontos críticos: se $f'(x) < 0$ à esquerda e $f'(x) > 0$ à direita do ponto crítico, então temos um ponto de mínimo local; se porventura $f'(x) > 0$ à esquerda e $f'(x) < 0$ à direita do ponto crítico, então temos um ponto de máximo local.

É importante verificar que nem todo ponto crítico de uma função será ponto de máximo ou mínimo, pode se tratar também de um ponto de inflexão (ponto de mudança de concavidade) da função. Neste caso as condições acima não serão satisfeitas.

Uma outra maneira de verificar a existência de máximo ou mínimo local é com o teste da derivada segunda que segue o seguinte teorema:

Teorema 2: Sejam f uma função que admite derivada de 2ª ordem contínua no intervalo aberto I e $p \in I$.

a) $f'(p) = 0$ e $f''(p) > 0$ => p é ponto de mínimo local.

b) $f'(p) = 0$ e $f''(p) < 0$ => p é ponto de máximo local.

De forma resumida, o teste da derivada segunda nos diz que, dado uma função qualquer f que aceite a segunda derivação, ou seja, existe $f''(x)$, se $f''(x) > 0$ no ponto crítico que está sendo analisado então trata-se de um ponto de mínimo local da função, caso $f''(x) < 0$ no ponto crítico, então este será ponto de máximo local da função. No caso de $f''(x) = 0$, então não podemos dizer se o ponto é de máximo ou mínimo local, podendo também tratar-se de um ponto de inflexão da função.

Os teoremas acima nos fornecem duas ferramentas usadas para encontrar pontos de máximo e mínimo locais em funções. Os chamados testes da derivada primeira e segunda conseguem dizer se os pontos críticos de uma função são pontos de máximo ou mínimo locais de forma extremamente confiável, embora existam momentos em que os resultados dos testes sejam inconclusivos tais quais nos pontos de inflexão.

Abaixo há duas situações totalmente hipotéticas criadas para exemplificar como a derivada é entendida como taxa de variação e como ela é usada para encontrar máximos e mínimos de funções. O desenvolvimento e resolução destes ficou totalmente a cargo do autor deste texto, tendo sido o responsável por grande parte do tempo dedicado ao desenvolvimento deste artigo. Embora sejam exemplos hipotéticos tentei dar o máximo possível de realidade aos problemas que foram elaborados para exemplificar o que foi aprendido nos anos de estudo do cálculo diferencial e integral.

2.3 – EXEMPLOS PRÁTICOS

Exemplo 1

Durante a pandemia de covid-19 uma pessoa viu-se desempregada, diante desta situação ela viu a oportunidade de ganhar dinheiro fabricando bolos confeitados em porções para 2 pessoas. Após alguns dias fabricando diferentes quantidades, vendendo a diferentes preços e em diferentes formas ela resolveu minimizar os custos de produção e maximizar os lucros. Ela viu que as porções ideais para 2 pessoas precisavam ter cerca de 300 cm³ de massa crua. O formato de forma ideal encontrado era o cilíndrico, e ela mesma faria as formas de papel-manteiga que custava R$ 3,68 o metro quadrado. A massa assada aumentava em 2/3 o seu volume original, e ela precisava que as formas chegassem a 6/7 do volume do bolo pronto para que o formato ficasse mais atraente visivelmente ao ser confeitado. O custo de produção da massa do bolo ficou em R$ 8,58 faltando o valor que seria gasto com a forma para podermos minimizar os custos. Ela também viu que o número de bolos vendidos variava muito dependendo do valor que ela cobrava por eles seguindo a seguinte relação:

$$20 - (x.\ln(c)^{-1})$$

Sendo *x* o valor cobrado por cada unidade e *c* o custo de cada unidade. Portanto quais seriam as medidas ideais da forma que minimizam os custos de produção, quantos bolos devem ser feitos e qual o valor poderá ser cobrado para que os lucros sejam os maiores possíveis?

Solução

Primeiramente temos que achar o volume do bolo assado. O problema nos diz que o volume da massa aumenta em 2/3 o seu volume original e que este é de 300 cm³, temos:

$$300 + (\tfrac{2}{3}.300) = 500cm^3$$

*S*abendo também que a forma deve conter cerda de 6/7 do volume total da massa temos:

$$500.\frac{6}{7} = 428{,}57cm^3$$

Agora que sabemos o volume que a nossa forma deve conter podemos encontrar suas dimensões a fim de minimizar o custo de sua produção. Inicialmente podemos usar a fórmula de cálculo do volume de um cilindro para encontrarmos uma relação para a altura do mesmo:

$$v = \pi r^2 h \Rightarrow 428{,}57 = \pi r^2 h \Rightarrow h = \frac{428{,}57}{\pi r^2}$$

Como não queremos que a nossa forma tenha tampa, a fórmula da área será dada por:

$$a = \pi r^2 + 2\pi r h$$

Agora podemos escrever a área em função do raio substituindo a altura h encontrada na equação da área:

$$a(r) = \pi r^2 + 2\pi r(\frac{428{,}57}{\pi r^2}) \Rightarrow a(r) = \pi r^2 + \frac{857{,}14}{r}$$

Derivando a equação da área em função do raio teremos:

$$a'(r) = 2\pi r - \frac{857{,}14}{r^2}$$

Agora podemos igualar a derivada encontrada a zero para podermos realizar o teste da derivada primeira:

$$2\pi r - \frac{857{,}14}{r^2} = 0 \Rightarrow \frac{2\pi r^3 - 857{,}14}{r^2} = 0 \Rightarrow 2\pi r^3 - 857{,}14 = 0 \Rightarrow$$

$$2\pi r^3 = 857{,}14 \Rightarrow r^3 = \frac{857{,}14}{2\pi} \Rightarrow r = \frac{\sqrt[3]{428{,}57}}{\pi} \Rightarrow$$

$$r \approx 5{,}1478cm$$

Este valor representa um ponto crítico da função, para saber se ele representa um ponto de máximo ou de mínimo podemos passar para o teste da derivada segunda:

$$a''(r) = 2\pi + \frac{1.714{,}28}{r^3} \Rightarrow a''(r) = 2\pi + \frac{1.714{,}28}{136{,}4159} \Rightarrow a''(r) = 18{,}8497 \Rightarrow a''(r) > 0$$

Como o valor da derivada segunda aplicada no ponto encontrado foi maior que 0, podemos dizer que o valor de r encontrado minimizará a área da forma, podemos então substituir o valor de r que foi encontrado na equação da área e descobrir qual será o seu valor:

$$a(r) = \pi r^2 + \frac{857{,}14}{r} \Rightarrow a(r) = \pi(5{,}1478^2) + \frac{857{,}14}{5{,}1478} \Rightarrow a(r) \approx 249{,}75cm^2$$

E a altura da forma será dada substituindo r na equação abaixo:

$$h = \frac{428{,}57}{\pi r^2} \Rightarrow h = \frac{428{,}57}{\pi(5{,}1478^2)} \Rightarrow h \approx 5{,}1479cm$$

As dimensões que minimizam a forma são: 5,1478 cm de raio e 5,1479 cm de altura, o que nos dá uma área de aproximadamente 249,75 cm² de forma.

Como o custo do papel é de R$ 3,68 por metro², o valor de cada forma será de:

$$c = (\frac{249{,}75}{10.000}).3{,}68 \Rightarrow c \approx R\$0{,}09$$

Então o custo total c de fabricação dos bolos será de R$ 8,67.

Agora que encontramos as dimensões da forma que nos fazem ter o menor custo de produção de cada unidade podemos maximizar os lucros. O número de bolos vendidos nos foi dado em função do valor cobrado por cada unidade, e o número de bolos varia conforme o valor cobrado por eles sendo que um valor muito alto acarretará em um menor número de unidades vendidas, e um valor muito baixo fará com que o lucro seja reduzido. Temos então que o lucro, a receita e o custo também serão dados em função do valor cobrado:

$$Custo = C(x) = (20 - x(ln(8{,}67))^{-1}).8{,}67$$

$$Receita = R(x) = (20 - x(ln(8{,}67))^{-1}).x$$

$$Lucro = L(x) = R(x) - C(x) \Rightarrow$$

$$L(x) = ((20 - x(ln(8{,}67))^{-1}).x) - ((20 - x(ln(8{,}67))^{-1}).8{,}67)$$

Derivando a função lucro teremos:

$$L'(x) = (20 - (2(ln(8{,}67)^{-1})x)) + (8{,}67(ln(8{,}67)^{-1})) \Rightarrow$$

$$L'(x) \approx 24{,}0141 - 0{,}9259x$$

Igualando a derivada da função lucro a 0 para o efetuarmos o teste da derivada primeiros teremos os pontos críticos da função:

$$24{,}0141 - 0{,}9259x = 0 \Rightarrow x = \frac{24{,}0141}{0{,}9259} \Rightarrow x \approx R\$25{,}9359$$

Derivando a função lucro uma segunda vez para prosseguirmos com o teste da derivada segunda teremos:

$$L''(x) = -0{,}9259$$

Com o teste da derivada segunda encontramos um resultado negativo, portanto trata-se de um ponto de máximo da função lucro.

Então número de bolos vendidos que maximizam a função lucro será dado substituindo o valor crítico de x que foi encontrado na equação que rege a quantidade de bolos que será vendida:

$$20-(x.ln(c)^{-1}) = 20-(25{,}9359.(ln(8{,}67))^{-1}) \approx 7{,}99$$

Portanto o lucro máximo será obtido com a venda de 8 bolos ao preço de R$ 25,93.

Vemos neste exemplo como a variação no valor dos itens que são utilizados na fabricação de um bolo podem interferir no seu valor de revenda e na quantidade que itens que podem ser comercializados.

Exemplo 2

Um bioquímico iniciou uma pesquisa com um certo tipo de bactéria em uma placa de petry. O objetivo da pesquisa era deixar que a bactéria se desenvolvesse até certo ponto e após esse ponto introduzir um antibacteriano na placa e analisar o tempo que levava até que a bactéria estivesse totalmente combatida. A equação que descreve o ciclo de vida dessa bactéria antes e após a introdução do antibiótico foi dada por:

$$f(t) = 50t^2 - \frac{t^3}{ln(500)} + 1$$

Sendo t dado em horas. O bioquímico resolveu encontrar o número máximo de bactérias que se desenvolveram na placa, quanto tempo demorou para que o antibiótico começasse a fazer efeito visto que sua introdução se deu na 55ª hora após o início do experimento, analisar qual a variação na taxa de crescimento antes e após o antibiótico estar fazendo efeito, e quanto tempo levou para que o número de bactérias fosse do máximo encontrado ao 0.

Solução

Primeiramente podemos encontrar as derivadas primeira e segunda da equação que descreve o ciclo de vida da bactéria:

$$f'(t) = 100t - \frac{3t^2}{ln(500)}$$
$$f''(t) = 100 - \frac{6t}{ln(500)}$$

Igualando a derivada primeira a 0 encontraremos os pontos críticos da equação:

$$f'(t) = 0 \Rightarrow 100t - \frac{3t^2}{ln(500)} = 0 \Rightarrow \frac{621{,}46t - 3t^2}{ln(500)} = 0 \Rightarrow t(621{,}46 - 3t) = 0 \Rightarrow$$

$$t = 0out = 207{,}15$$

Um dos pontos encontrado foi o que dá início ao experimento, por este motivo passaremos à analise do outro ponto para saber se este é um ponto de máximo, mínimo ou ponto de inflexão. Efetuando o teste da derivada segunda teremos o seguinte resultado:

$$f''(t) = 100 - \frac{6t}{ln(500)} \Rightarrow f''(207{,}15) = 100 - \frac{1.242{,}9}{ln(500)} \Rightarrow$$

$$f''(t) \approx -99{,}99$$

Com o resultado negativo no teste da derivada segunda podemos concluir que t = 207,15 trata-se de um ponto de máximo da equação. O número total de bactérias no tempo encontrado é dado substituindo t na equação original pelo valor do ponto crítico encontrado:

$$f(t) = 50t^2 - \frac{t^3}{ln(500)} \Rightarrow f(207{,}15) = 50.(207{,}15)^2 - \frac{(207{,}15)^3}{ln(500)} \Rightarrow$$

$$f(207{,}15) \approx 715.210$$

O número máximo de bactérias encontrado na placa foi cerca de 715.210 bactérias.

Para encontrarmos o instante em que o antibiótico começou a fazer efeito podemos analisar a mudança de concavidade da equação, igualando a derivada segunda a 0 teremos o ponto de inflexão que procuramos, subtraindo o valor encontrado pelo momento em que o antibiótico foi inserido na placa que foi dado no problema podemos encontrar o tempo que levou para que ele começasse a fazer efeito na colônia de bactérias:

$$f''(t) = 0 \Rightarrow 100 - \frac{6t}{ln(500)} = 0 \Rightarrow 621{,}46 - 6t = 0 \Rightarrow t \approx 103{,}57$$

$$103{,}57 - 55 = 48{,}57$$

O antibiótico começou a ter efeito após cerca de 48,57 horas de sua inserção na placa. Como no instante 103,57 o antibiótico começa a fazer efeito, analisemos a taxa de crescimento entre os instantes 103 e 102 que representam o momento antes do antibiótico fazer efeito e entre os instantes 105 e 104 que representam o momento após o antibiótico fazer efeito:

$$f'(103) - f'(102) = (100(103) - \frac{3(103)^2}{ln(500)}) - (100(102) - \frac{3(102)^2}{ln(500)}) \Rightarrow$$

$$f'(103) - f'(102) \approx 1{,}0396$$

$$f'(105) - f'(104) = (100(105) - \frac{3(105)^2}{ln(500)}) - (100(104) - \frac{3(104)^2}{ln(500)}) \Rightarrow$$

$$f'(105) - f'(104) \approx -0.8913$$

Podemos ver que houve uma desaceleração na taxa de crescimento do número de bactérias logo após o antibiótico começar a fazer efeito.

Para encontrarmos o tempo que levou do instante em que ocorreu a concentração máxima de bactérias até o instante em que seu número foi reduzido a zero basta subtrair o valor de t no instante máximo do valor de t caso f(t)=0. Temos então:

$$f(t) = 0 \Rightarrow 50t^2 - \frac{t^3}{ln(500)} + 1 = 0 \Rightarrow \frac{50ln(500)t^2 - t^3 + ln(500)}{ln(500)} = 0 \Rightarrow$$

$$t(50ln(500)t - t^2) = -ln(500) \Rightarrow t = 50ln(500) \Rightarrow t \approx 310{,}73$$

$$310{,}73 - 207{,}15 = 103{,}58$$

Portanto para que a população de bactérias chegasse do ponto máximo até 0 passaram cerca de 103,58 horas. O tempo total de duração do experimento foi de 310,73 horas.

Neste exemplo vimos como a taxa de crescimento do número de bactérias diminuiu após o antibiótico começar a fazer efeito, vimos também como a taxa de decrescimento acelerou após esse momento até que o número de bactérias se tornasse 0. Este tipo de pesquisa é de grande importância na indústria farmacêutica, visto que todo medicamento deve ser testado antes de seu uso ser indicado, e este tipo de análise indica quanto tempo demorará para que um determinado medicamento possa começar a surtir efeito contra algum tipo de doença, e ajudar a encontrar alternativas que sejam mais vantajosas para uso.

3 – METODOLOGIA

Este texto foi realizado mediante uma pesquisa bibliográfica básica sobre como a derivada pode ser interpretada como uma taxa de variação e como isso influencia diretamente no seu uso como ferramenta na área de otimização de funções.

A escolha dos materiais utilizados se deu por meio de pesquisa em volumes referenciados como fonte de pesquisa bibliográfica em matérias de Cálculo Diferencial e Integral do curso de Matemática do Centro Universitário Uninter, e dos cursos de Estatística e Física da Universidade Federal de Uberlândia.

Os exemplos utilizados foram desenvolvidos e resolvidos inteiramente pelo autor deste texto, tendo tido algum embasamento em experiências vividas.

4 - CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este texto teve como objetivo inicial visualizar como as derivadas podem ser compreendidas como taxas de variação. No primeiro ponto abordado foi demonstrado que as derivadas são limites de cálculos de taxas de variação.

Outro objetivo foi a demonstração de como proceder para realizar o cálculo de uma derivada, foi visto também que existem algumas regras básicas para chegar ao cálculo de uma derivada e que existem algumas derivadas que tem o seu calculo feito de formma imediata que auxiliam bastante para que outras possam ser encontradas com mais facilidade.

O uso de derivadas como ferramenta para encontrar pontos críticos de funções também foi abordado. O seu uso para realizar análise dos pontos críticos dessas funções também foi abordado durante a execução deste texto.

Após a pesquisa bibliográfica foi melhor percebido como as derivadas são interpretadas como taxas de variação e o seu uso dentro da área de otimização de funções. Ela é de vital importância para compreender diversos fenômenos nas mais diversas áreas do conhecimento.

A revisão de vários conceitos, teoremas e regras de derivação proporcionaram ~~uma~~ melhor compreensão de vários tópicos que outrora achava terem sido compreendidos, mas que agora fazendo uma melhor análise foi percebido que apenas havia vislumbrado a superfície do conteúdo de derivação como taxa de variação. Várias dúvidas surgiram em detrimento desta pesquisa, principalmente na resolução dos exemplos que foram desenvolvidos.

Os conceitos de máximo e mínimo locais, algumas regras de derivação e teoremas foram melhor explorados e estudados, visto que foi preciso rever conteúdos que foram aprendidos nas primeiras disciplinas do curso de bacharelado em Matemática.

Uma das dificuldades encontradas para a realização deste texto foi o fato de que a grande maioria dos autores sempre trata do uso de derivadas como taxas de variação fazendo uso de exemplos práticos geralmente na área de Física. Foram poucos os textos encontrados que fizeram uma pequena abordagem do assunto de maneira generalizada. Isso acaba sendo um pequeno entrave para a realização de uma pesquisa mais voltada para a parte teórica desse tema.

REFERÊNCIAS

AGUSTINI, Edson. **Notas para o acompanhamento das aulas de Cálculo Diferencial e Integral I Matemática e Estatística.** Disponível em <https://drive.google.com/file/d/1SlfKYYc7cRyWsADheuSK5pFdQgwO_32g/view> Acessado em 07 de outubro de 2021.

FACCIN, Giovani Manzeppi. **Elementos de cálculo diferencial e integral.** 1ª ed. Curitiba: Intersaberes, 2015.

FLEMING, Diva Marília; GONÇALVES, Mirian Buss. **Cálculo A: funções, limite, derivação e integração.** 6ª ed. São Paulo: Editora Pearson Education, 2006.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um Curso de Cálculo** (4 vols.). 5ª ed. Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos, 2001.

LEITE, Álvaro Emílio; CASTANHEIRA, Nelson Pereira. **Tópicos de cálculo I: limites, derivadas e integrais** (Coleção desmistificando a Matemática; v. 5). 1ª ed. Curitiba: Intersaberes, 2017.

STEWART, James. **Cálculo** (2 vols.). 5ª ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006.