TENSOR DE WEYL EM ESPAÇOS CONFORMES

SÁNCHEZ FILHO, Emil de Souza[1]
RU 2771643
PIANEZZER, Guilherme Augusto[2]

RESUMO

O estudo dos tensores é fundamental para as aplicações em Física, pois os fenômenos naturais são analisados por meio de modelos que incluem essas variedades. Contudo, as coordenadas dos sistemas de referência não são parte desses acontecimentos, mas apenas uma ferramenta usada para representá-los matematicamente. Este artigo aborda tópicos essenciais para o desenvolvimento teórico de temas onde os espaços métricos com várias dimensões são importantes. Faz-se a introdução do conceito de curvatura de Riemann e a dedução do tensor de Ricci que são tópicos detalhadamente estudados. São analisados os espaços conformes de Riemann com a definição do tensor de Weyl e as suas particularidades. Demonstra-se que contração do tensor de Weyl é a parcela do tensor de curvatura de Riemann-Christoffel para a qual todas as contrações são nulas, realçando-se que o seu traço é nulo, e que para o espaço de quatro dimensões existem 256 componentes desse tensor, mas somente 10 são algebricamente independentes, as quais são parte das 20 componentes do tensor de curvatura de Riemann-Christoffel, sendo que as outras 10 são devidas ao tensor de Ricci. Demonstra-se que a curvatura desse espaço é determinada pelo tensor de Weyl, mostrando-se que quando o tensor de Ricci é nulo o espaço não é necessariamente plano. São desenvolvidas expressões tensoriais para análise de espaços de Riemann com *N* dimensões, de modo a fornecer um arcabouço teórico que possibilite o estudo e análise de problemas relacionados com a Teoria da Relatividade Geral.

Palavras-chave: Curvatura do espaço. Tensor de Riemann-Christoffel. Espaço conforme. Tensor de Weyl.

1. INTRODUÇÃO

A generalização do espaço euclidiano a três dimensões para um número N de dimensões é imediata, definindo-se um espaço E_N . Essa ampliação de conceitos requer a fixação de um grupo de N variáveis x^i, $i = 1, 2, 3, \cdots N$, relativas a um ponto $P(x^i) \in E_N$, relacionadas a um sistema referencial X^i , e denominadas

[1] Aluno do Centro Universitário Internacional UNINTER. Artigo apresentado como Trabalho de Conclusão de Curso do Bacharelado em Matemática. Segundo semestre de 2021.
[2] Professor Orientador Guilherme Augusto Pianezzer.

coordenadas do ponto nesse sistema de referência. O conjunto de pontos associados de forma biunívoca às coordenadas do sistema de referência X^i define o espaço N dimensional, grafado como E_N.

O objetivo específico desse trabalho é desenvolver expressões tensoriais para análise de espaços de Riemann com *N* dimensões, de modo a fornecer um arcabouço teórico que possibilite o estudo e análise de problemas relacionados com a Teoria da Relatividade Geral. A elaboração deste artigo fundamenta-se em textos clássicos de Cálculo Tensorial, LEVI-CIVITA (1928), EISENHART (1949), WEATHERBURN (2008), e a consulta de livros correlatos ao tema tratado, LEE (1997) e FRANKEL (2007). A abordagem seguida no desenvolvimento teórico está alicerçada em DAS (2007), DE *et al*. (2008), AHSAN (2008) e principalmente em SÁNCHEZ FILHO (2016).

2. CURVATURA DO ESPAÇO

A geometria euclidiana fundamenta-se nos conceitos básicos de ponto, de reta e de plano, e em diversos axiomas. Nessa geometria define-se no espaço euclidiano E_2 uma linha curva como aquela que não é uma reta, e no espaço euclidiano E_3 define-se uma superfície curva como aquela que não é um plano. Sendo a curvatura uma característica intrínseca do espaço, logo não é uma propriedade mensurável por comparação entre espaços distintos. A concepção de uma geometria de Riemann para o espaço E_N baseia-se nos conceitos capitais da geometria euclidiana no espaço E_3, cuja generalização é realizada por meio da definição de uma métrica para o espaço. O espaço cuja métrica pode ser expressa como uma métrica euclidiana, positiva e definida, é denominado espaço plano, caso contrário é denominado espaço com curvatura.

Para uma função $\phi(x^i)$ de classe C^2 que define um campo escalar tem-se a derivada $\frac{\partial \phi(x^i)}{\partial x^k}$ que representa um vetor covariante. Derivando-se novamente em relação à variável x^j resulta por meio da regra da derivação parcial do Cálculo Diferencial

$$\frac{\partial^2 \phi(x^i)}{\partial x^k \partial x^j} = \frac{\partial^2 \phi(x^i)}{\partial x^j \partial x^k}$$

Nesse caso a derivada covariante é comutativa. Contudo, para tensores cujas componentes são funções de classe C^2 representadas em sistemas referenciais curvilíneos essa independência da ordem de derivação em geral não se verifica. Conclui-se que somente a condição das funções serem de classe C^2 não é suficiente para garantir essa independência.

Para o caso de um vetor covariante u_i tem-se para sua derivada covariante o tensor de variância $(0,2)$

$$\partial_j u_i = \frac{\partial u_i}{\partial x^j} - u_\ell \Gamma^\ell_{ij} \tag{2.1}$$

onde Γ^ℓ_{ij} é o símbolo de Christoffel e pondo-se

$$\partial_j u_i = T_{ij}$$

segue-se para a derivada covariante desse tensor em relação à variável x^k

$$\partial_k T_{ij} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x^k} - T_{\ell j}\Gamma^\ell_{ik} - T_{i\ell}\Gamma^\ell_{jk} \tag{2.2}$$

A substituição da expressão 2.1 nessa expressão fornece

$$\begin{aligned}\partial_k T_{ij} &= \frac{\partial(\partial_j u_i)}{\partial x^k} - (\partial_j u_\ell)\Gamma^\ell_{ik} - (\partial_\ell u_i)\Gamma^\ell_{jk} \\ &= \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x^j} - u_\ell \Gamma^\ell_{ij}\right) - \left(\frac{\partial u_\ell}{\partial x^j} - u_m \Gamma^m_{\ell j}\right)\Gamma^\ell_{ik} - \left(\frac{\partial u_i}{\partial x^\ell} - u_m \Gamma^m_{i\ell}\right)\Gamma^\ell_{jk}\end{aligned}$$

logo

$$\partial_k T_{ij} = \partial_j \partial_k u_i = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^k \partial x^j} - \frac{\partial u_\ell}{\partial x^k}\Gamma^\ell_{ij} - u_\ell \frac{\partial \Gamma^\ell_{ij}}{\partial x^j} - \frac{\partial u_\ell}{\partial x^j}\Gamma^\ell_{ik} + u_m \Gamma^m_{\ell j}\Gamma^\ell_{ik} - \frac{\partial u_i}{\partial x^\ell}\Gamma^\ell_{jk} + u_m \Gamma^m_{i\ell}\Gamma^\ell_{jk} \tag{2.3}$$

Essa expressão representa um tensor de variância (0, 3). A inversão da ordem de derivação fornece

$$\partial_k \partial_j u_i = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial u_\ell}{\partial x^j}\Gamma^\ell_{ik} - u_\ell \frac{\partial \Gamma^\ell_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial u_\ell}{\partial x^k}\Gamma^\ell_{ij} + u_m \Gamma^m_{\ell k}\Gamma^\ell_{ij} - \frac{\partial u_i}{\partial x^\ell}\Gamma^\ell_{kj} + u_m \Gamma^m_{i\ell}\Gamma^\ell_{kj} \tag{2.4}$$

No Cálculo Diferencial a ordem da diferenciação não altera o resultado obtido, então se tem para as derivadas parciais

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^j \partial x^k} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^k \partial x^j}$$

Subtraindo-se a expressão 2.4 da expressão 2.3 e considerando-se a simetria do símbolo de Christoffel resulta

$$\partial_j \partial_k u_i - \partial_k \partial_j u_i = u_\ell \left(\frac{\partial \Gamma^\ell_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma^\ell_{ij}}{\partial x^k} \right) + u_m \left(\Gamma^m_{\ell j} \Gamma^\ell_{ik} - \Gamma^m_{\ell k} \Gamma^\ell_{ij} \right)$$

Com a permutação dos índices mudos $m \leftrightarrow \ell$ no segundo termo à direita dessa expressão segue-se

$$\partial_j \partial_k u_i - \partial_k \partial_j u_i = u_\ell \left[\left(\frac{\partial \Gamma^\ell_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma^\ell_{ij}}{\partial x^k} \right) + \left(\Gamma^\ell_{mj} \Gamma^m_{ik} - \Gamma^\ell_{mk} \Gamma^m_{ij} \right) \right]$$

Pondo-se

$$R^\ell_{ijk} = \frac{\partial \Gamma^\ell_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma^\ell_{ij}}{\partial x^k} + \Gamma^\ell_{mj} \Gamma^m_{ik} - \Gamma^\ell_{mk} \Gamma^m_{ij} \tag{2.5}$$

resulta

$$\partial_j \partial_k u_i - \partial_{kj} u_i = u_\ell R^\ell_{ijk}$$

O tensor definido pela expressão 2.5 é denominado tensor de curvatura de Riemann-Christoffel, tensor misto de Riemann-Christoffel, ou tensor de Riemann-Christoffel do 2º tipo, ou simplesmente tensor de curvatura. Esse tensor define um campo tensorial que depende apenas do tensor métrico e de suas derivadas até 2ª ordem, e classifica o espaço, pois se $R^\ell_{ijk} \neq 0$ tem-se um espaço com curvatura. O tensor de curvatura de Riemann-Christoffel é antissimétrico em relação aos dois últimos índices $R^i_{\ell kj} = -R^i_{\ell jk}$.

O tensor métrico g_{ij} e o seu tensor conjugado g^{ij} são únicos num espaço de Riemann, então suas derivadas parciais de 1ª e de 2ª ordem e os símbolos de Christoffel desse espaço são únicos no ponto $x^i \in E_N$. Desse modo verifica-se que deve ser demonstrada a unicidade desse tensor.

Entretanto, as derivadas covariantes de um vetor contravariante em relação às coordenadas de um sistema referencial são únicas no ponto $x^i \in E_N$, e sendo o tensor de curvatura de Riemann-Christoffel de variância (1,3) obtido por meio dessas derivadas, conclui-se que ele é único no ponto considerado.

Seja o tensor de curvatura de Riemann-Christoffel

$$R^{\ell}_{ijk} = \frac{\partial \Gamma^{\ell}_{ik}}{\partial x^{j}} - \frac{\partial \Gamma^{\ell}_{ij}}{\partial x^{k}} + \Gamma^{m}_{ik}\Gamma^{\ell}_{mj} - \Gamma^{m}_{ij}\Gamma^{\ell}_{mk}$$

e as permutações cíclicas dos índices i, j, k geram as expressões

$$R^{\ell}_{jki} = \frac{\partial \Gamma^{\ell}_{ji}}{\partial x^{k}} - \frac{\partial \Gamma^{\ell}_{jk}}{\partial x^{i}} + \Gamma^{m}_{ji}\Gamma^{\ell}_{mk} - \Gamma^{m}_{jk}\Gamma^{\ell}_{mi}$$

$$R^{\ell}_{kij} = \frac{\partial \Gamma^{\ell}_{kj}}{\partial x^{i}} - \frac{\partial \Gamma^{\ell}_{ki}}{\partial x^{j}} + \Gamma^{m}_{kj}\Gamma^{\ell}_{mi} - \Gamma^{m}_{ki}\Gamma^{\ell}_{mj}$$

A soma dessas três expressões fornece a 1ª identidade de Bianchi para o tensor de curvatura de Riemann-Christoffel

$$R^{\ell}_{ijk} + R^{\ell}_{jki} + R^{\ell}_{kij} = 0 \qquad (2.6)$$

A derivada covariante de um tensor de variância (1, 3) é dada por

$$\partial_k T^{j}_{p\ell m} = \frac{\partial T^{j}_{p\ell m}}{\partial x^{k}} - T^{j}_{q\ell m}\Gamma^{q}_{pk} - T^{j}_{pqm}\Gamma^{q}_{\ell k} - T^{j}_{p\ell q}\Gamma^{q}_{mk} + T^{q}_{p\ell m}\Gamma^{j}_{kq}$$

donde para o tensor de curvatura de Riemann-Christoffel

$$R^{\ell}_{ijk} = \frac{\partial \Gamma^{\ell}_{ik}}{\partial x^{j}} - \frac{\partial \Gamma^{\ell}_{ij}}{\partial x^{k}} + \Gamma^{m}_{ik}\Gamma^{\ell}_{mj} - \Gamma^{m}_{ij}\Gamma^{\ell}_{mk}$$

tem-se a derivada covariante em relação à coordenada x^{p}

$$\begin{aligned}\partial_p R^{\ell}_{ijk} = {} & \frac{\partial^2 \Gamma^{\ell}_{ik}}{\partial x^{p}\partial x^{j}} - \frac{\partial^2 \Gamma^{\ell}_{ij}}{\partial x^{p}\partial x^{k}} + \frac{\partial \Gamma^{m}_{ik}}{\partial x^{p}}\Gamma^{\ell}_{mj} + \Gamma^{m}_{ik}\frac{\partial \Gamma^{\ell}_{mj}}{\partial x^{p}} - \frac{\partial \Gamma^{m}_{ij}}{\partial x^{p}}\Gamma^{\ell}_{mk} - \Gamma^{m}_{ij}\frac{\partial \Gamma^{\ell}_{mk}}{\partial x^{p}} \\ & + R^{m}_{ijk}\Gamma^{\ell}_{mp} - R^{\ell}_{mjk}\Gamma^{m}_{ip} - R^{\ell}_{imk}\Gamma^{m}_{jp} - R^{\ell}_{ijm}\Gamma^{m}_{kp}\end{aligned}$$

Com a permutação cíclica dos índices j, k, p nessa expressão seguem-se

$$\begin{aligned}\partial_j R^{\ell}_{ikp} = {} & \frac{\partial^2 \Gamma^{\ell}_{ip}}{\partial x^{j}\partial x^{k}} - \frac{\partial^2 \Gamma^{\ell}_{ik}}{\partial x^{j}\partial x^{p}} + \frac{\partial \Gamma^{m}_{ip}}{\partial x^{j}}\Gamma^{\ell}_{mk} + \Gamma^{m}_{ip}\frac{\partial \Gamma^{\ell}_{mk}}{\partial x^{j}} - \frac{\partial \Gamma^{m}_{ik}}{\partial x^{j}}\Gamma^{\ell}_{mp} - \Gamma^{m}_{ik}\frac{\partial \Gamma^{\ell}_{mp}}{\partial x^{j}} \\ & + R^{m}_{ikp}\Gamma^{\ell}_{mj} - R^{\ell}_{mkp}\Gamma^{m}_{ij} - R^{\ell}_{imp}\Gamma^{m}_{kj} - R^{\ell}_{ikm}\Gamma^{m}_{pj}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial_k R^{\ell}_{ipj} = {} & \frac{\partial^2 \Gamma^{\ell}_{ij}}{\partial x^{k}\partial x^{p}} - \frac{\partial^2 \Gamma^{\ell}_{ip}}{\partial x^{k}\partial x^{j}} + \frac{\partial \Gamma^{m}_{ij}}{\partial x^{k}}\Gamma^{\ell}_{mp} + \Gamma^{m}_{ij}\frac{\partial \Gamma^{\ell}_{mp}}{\partial x^{k}} - \frac{\partial \Gamma^{m}_{ip}}{\partial x^{k}}\Gamma^{\ell}_{mj} - \Gamma^{m}_{ip}\frac{\partial \Gamma^{\ell}_{mj}}{\partial x^{k}} \\ & + R^{m}_{ipj}\Gamma^{\ell}_{mk} - R^{\ell}_{mpj}\Gamma^{m}_{ik} - R^{\ell}_{imj}\Gamma^{m}_{pk} - R^{\ell}_{ipm}\Gamma^{m}_{jk}\end{aligned}$$

A soma dessas três expressões fornece

$$\partial_p R^{\ell}_{ikj} + \partial_j R^{\ell}_{ikp} + \partial_k R^{\ell}_{ipj} = \frac{\partial^2 \Gamma^{\ell}_{ik}}{\partial x^p \partial x^j} - \frac{\partial^2 \Gamma^{\ell}_{ij}}{\partial x^p \partial x^k} + \frac{\partial \Gamma^m_{ik}}{\partial x^p} \Gamma^{\ell}_{mj} + \Gamma^m_{ik} \frac{\partial \Gamma^{\ell}_{mj}}{\partial x^p} - \frac{\partial \Gamma^m_{ij}}{\partial x^p} \Gamma^{\ell}_{mk} - \Gamma^m_{ij} \frac{\partial \Gamma^{\ell}_{mk}}{\partial x^p}$$

$$+ R^m_{ijk} \Gamma^{\ell}_{mp} - R^{\ell}_{mjk} \Gamma^m_{ip} - R^{\ell}_{imk} \Gamma^m_{jp} - R^{\ell}_{ijm} \Gamma^m_{kp} + \frac{\partial^2 \Gamma^{\ell}_{ip}}{\partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial^2 \Gamma^{\ell}_{ik}}{\partial x^j \partial x^p} + \frac{\partial \Gamma^m_{ip}}{\partial x^j} \Gamma^{\ell}_{mk} + \Gamma^m_{ip} \frac{\partial \Gamma^{\ell}_{mk}}{\partial x^j}$$

$$- \frac{\partial \Gamma^m_{ik}}{\partial x^j} \Gamma^{\ell}_{mp} - \Gamma^m_{ik} \frac{\partial \Gamma^{\ell}_{mp}}{\partial x^j} + R^m_{ikp} \Gamma^{\ell}_{mj} - R^{\ell}_{mkp} \Gamma^m_{ij} - R^{\ell}_{imp} \Gamma^m_{kj} - R^{\ell}_{ikm} \Gamma^m_{pj} + \frac{\partial^2 \Gamma^{\ell}_{ij}}{\partial x^k \partial x^p} - \frac{\partial^2 \Gamma^{\ell}_{ip}}{\partial x^k \partial x^j}$$

$$+ \frac{\partial \Gamma^m_{ij}}{\partial x^k} \Gamma^{\ell}_{mp} + \Gamma^m_{ij} \frac{\partial \Gamma^{\ell}_{mp}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^m_{ip}}{\partial x^k} \Gamma^{\ell}_{mj} - \Gamma^m_{ip} \frac{\partial \Gamma^{\ell}_{mj}}{\partial x^k} + R^m_{ipj} \Gamma^{\ell}_{mk} - R^{\ell}_{mpj} \Gamma^m_{ik} - R^{\ell}_{imj} \Gamma^m_{pk} - R^{\ell}_{ipm} \Gamma^m_{jk}$$

Com as igualdades

$$\frac{\partial^2 \Gamma^{\ell}_{ik}}{\partial x^p \partial x^j} = \frac{\partial^2 \Gamma^{\ell}_{ik}}{\partial x^j \partial x^p}$$

$$\frac{\partial^2 \Gamma^{\ell}_{ij}}{\partial x^p \partial x^k} = \frac{\partial^2 \Gamma^{\ell}_{ij}}{\partial x^k \partial x^p}$$

$$\frac{\partial^2 \Gamma^{\ell}_{ip}}{\partial x^j \partial x^k} = \frac{\partial^2 \Gamma^{\ell}_{ip}}{\partial x^k \partial x^j}$$

a expressão anterior fica

$$\partial_p R^{\ell}_{ikj} + \partial_j R^{\ell}_{ikp} + \partial_k R^{\ell}_{ipj} = \frac{\partial \Gamma^m_{ik}}{\partial x^p} \Gamma^{\ell}_{mj} + \Gamma^m_{ik} \frac{\partial \Gamma^{\ell}_{mj}}{\partial x^p} - \frac{\partial \Gamma^m_{ij}}{\partial x^p} \Gamma^{\ell}_{mk} - \Gamma^m_{ij} \frac{\partial \Gamma^{\ell}_{mk}}{\partial x^p}$$

$$+ R^m_{ijk} \Gamma^{\ell}_{mp} - R^{\ell}_{mjk} \Gamma^m_{ip} - R^{\ell}_{imk} \Gamma^m_{jp} - R^{\ell}_{ijm} \Gamma^m_{kp} + \frac{\partial \Gamma^m_{ip}}{\partial x^j} \Gamma^{\ell}_{mk} + \Gamma^m_{ip} \frac{\partial \Gamma^{\ell}_{mk}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma^m_{ik}}{\partial x^j} \Gamma^{\ell}_{mp}$$

$$- \Gamma^m_{ik} \frac{\partial \Gamma^{\ell}_{mp}}{\partial x^j} + R^m_{ikp} \Gamma^{\ell}_{mj} - R^{\ell}_{mkp} \Gamma^m_{ij} - R^{\ell}_{imp} \Gamma^m_{kj} - R^{\ell}_{ikm} \Gamma^m_{pj} + \frac{\partial \Gamma^m_{ij}}{\partial x^k} \Gamma^{\ell}_{mp} + \Gamma^m_{ij} \frac{\partial \Gamma^{\ell}_{mp}}{\partial x^k}$$

$$- \frac{\partial \Gamma^m_{ip}}{\partial x^k} \Gamma^{\ell}_{mj} - \Gamma^m_{ip} \frac{\partial \Gamma^{\ell}_{mj}}{\partial x^k} + R^m_{ipj} \Gamma^{\ell}_{mk} - R^{\ell}_{mpj} \Gamma^m_{ik} - R^{\ell}_{imj} \Gamma^m_{pk} - R^{\ell}_{ipm} \Gamma^m_{jk}$$

Pondo-se os símbolos de Christoffel em evidência e considerando-se a antissimetria do tensor de curvatura de Riemann-Christoffel segue-se

$$\partial_p R^{\ell}_{ikj} + \partial_j R^{\ell}_{ikp} + \partial_k R^{\ell}_{ipj} = \Gamma^{\ell}_{mp} \left(R^m_{ijk} - \frac{\partial \Gamma^m_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial \Gamma^m_{ij}}{\partial x^k} \right) + \Gamma^{\ell}_{mj} \left(R^m_{ikp} + \frac{\partial \Gamma^m_{ik}}{\partial x^p} - \frac{\partial \Gamma^m_{ip}}{\partial x^k} \right)$$

$$+ \Gamma^{\ell}_{mk} \left(R^m_{ipj} - \frac{\partial \Gamma^m_{ij}}{\partial x^p} + \frac{\partial \Gamma^m_{ip}}{\partial x^j} \right) - \Gamma^m_{ip} \left(R^{\ell}_{mjk} - \frac{\partial \Gamma^{\ell}_{mk}}{\partial x^j} + \frac{\partial \Gamma^{\ell}_{mj}}{\partial x^k} \right) - \Gamma^m_{ij} \left(R^{\ell}_{mkp} + \frac{\partial \Gamma^{\ell}_{mk}}{\partial x^p} - \frac{\partial \Gamma^{\ell}_{mp}}{\partial x^k} \right)$$

$$- \Gamma^m_{ik} \left(R^{\ell}_{mpj} - \frac{\partial \Gamma^{\ell}_{mj}}{\partial x^p} + \frac{\partial \Gamma^{\ell}_{mp}}{\partial x^j} \right)$$

As expressões dos tensores são dadas por

$$R^m_{ijk} = \frac{\partial \Gamma^m_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma^m_{ij}}{\partial x^k} + \Gamma^q_{ik}\Gamma^m_{qj} - \Gamma^q_{ij}\Gamma^m_{qk} \qquad R^m_{ikp} = \frac{\partial \Gamma^m_{ip}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^m_{ik}}{\partial x^p} + \Gamma^q_{ip}\Gamma^m_{qk} - \Gamma^q_{ik}\Gamma^m_{qp}$$

$$R^m_{ipj} = \frac{\partial \Gamma^m_{ij}}{\partial x^p} - \frac{\partial \Gamma^m_{ip}}{\partial x^j} + \Gamma^q_{ij}\Gamma^m_{qp} - \Gamma^q_{ip}\Gamma^m_{qj} \qquad R^\ell_{mjk} = \frac{\partial \Gamma^\ell_{mk}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma^\ell_{mj}}{\partial x^k} + \Gamma^q_{mk}\Gamma^\ell_{qj} - \Gamma^q_{mj}\Gamma^\ell_{qk}$$

$$R^\ell_{mkp} = \frac{\partial \Gamma^\ell_{mp}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^\ell_{mk}}{\partial x^p} + \Gamma^q_{mp}\Gamma^\ell_{qk} - \Gamma^q_{mk}\Gamma^\ell_{qp} \qquad R^\ell_{mpj} = \frac{\partial \Gamma^\ell_{mj}}{\partial x^p} - \frac{\partial \Gamma^\ell_{mp}}{\partial x^j} + \Gamma^q_{mj}\Gamma^\ell_{qp} - \Gamma^q_{mp}\Gamma^\ell_{qj}$$

que substituídas na expressão anterior fornecem

$$\begin{aligned}
\partial_p R^\ell_{ikj} + \partial_j R^\ell_{ikp} + \partial_k R^\ell_{ipj} &= \Gamma^\ell_{mp}\left(\frac{\partial \Gamma^m_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma^m_{ij}}{\partial x^k} + \Gamma^q_{ik}\Gamma^m_{qj} - \Gamma^q_{ij}\Gamma^m_{qk} - \frac{\partial \Gamma^m_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial \Gamma^m_{ij}}{\partial x^k}\right) \\
&+ \Gamma^\ell_{mj}\left(\frac{\partial \Gamma^m_{ip}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^m_{ik}}{\partial x^p} + \Gamma^q_{ip}\Gamma^m_{qk} - \Gamma^q_{ik}\Gamma^m_{qp} + \frac{\partial \Gamma^m_{ik}}{\partial x^p} - \frac{\partial \Gamma^m_{ip}}{\partial x^k}\right) \\
&+ \Gamma^\ell_{mk}\left(\frac{\partial \Gamma^m_{ij}}{\partial x^p} - \frac{\partial \Gamma^m_{ip}}{\partial x^j} + \Gamma^q_{ij}\Gamma^m_{qp} - \Gamma^q_{ip}\Gamma^m_{qj} - \frac{\partial \Gamma^m_{ij}}{\partial x^p} + \frac{\partial \Gamma^m_{ip}}{\partial x^j}\right) \\
&- \Gamma^m_{ip}\left(\frac{\partial \Gamma^\ell_{mk}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma^\ell_{mj}}{\partial x^k} + \Gamma^q_{mk}\Gamma^\ell_{qj} - \Gamma^q_{mj}\Gamma^\ell_{qk} - \frac{\partial \Gamma^\ell_{mk}}{\partial x^j} + \frac{\partial \Gamma^\ell_{mj}}{\partial x^k}\right) \\
&- \Gamma^m_{ij}\left(\frac{\partial \Gamma^\ell_{mp}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^\ell_{mk}}{\partial x^p} + \Gamma^q_{mp}\Gamma^\ell_{qk} - \Gamma^q_{mk}\Gamma^\ell_{qp} + \frac{\partial \Gamma^\ell_{mk}}{\partial x^p} - \frac{\partial \Gamma^\ell_{mp}}{\partial x^k}\right) \\
&- \Gamma^m_{ik}\left(\frac{\partial \Gamma^\ell_{mj}}{\partial x^p} - \frac{\partial \Gamma^\ell_{mp}}{\partial x^j} + \Gamma^q_{mj}\Gamma^\ell_{qp} - \Gamma^q_{mp}\Gamma^\ell_{qj} - \frac{\partial \Gamma^\ell_{mj}}{\partial x^p} + \frac{\partial \Gamma^\ell_{mp}}{\partial x^j}\right)
\end{aligned}$$

Simplificando-se resulta

$$\begin{aligned}
&\partial_p R^\ell_{ikj} + \partial_j R^\ell_{ikp} + \partial_k R^\ell_{ipj} = \Gamma^\ell_{mp}\left(\Gamma^q_{ik}\Gamma^m_{qj} - \Gamma^q_{ij}\Gamma^m_{qk}\right) + \Gamma^\ell_{mj}\left(\Gamma^q_{ip}\Gamma^m_{qk} - \Gamma^q_{ik}\Gamma^m_{qp}\right) + \Gamma^\ell_{mk}\left(\Gamma^q_{ij}\Gamma^m_{qp} - \Gamma^q_{ip}\Gamma^m_{qj}\right) \\
&- \Gamma^m_{ip}\left(\Gamma^q_{mk}\Gamma^\ell_{qj} - \Gamma^q_{mj}\Gamma^\ell_{qk}\right) - \Gamma^m_{ij}\left(\Gamma^q_{mp}\Gamma^\ell_{qk} - \Gamma^q_{mk}\Gamma^\ell_{qp}\right) - \Gamma^m_{ik}\left(\Gamma^q_{mj}\Gamma^\ell_{qp} - \Gamma^q_{mp}\Gamma^\ell_{qj}\right)
\end{aligned}$$

A permuta dos índices mudos $m \leftrightarrow q$ nos seis primeiros termos dessa expressão fornece

$$\begin{aligned}
&\partial_p R^\ell_{ikj} + \partial_j R^\ell_{ikp} + \partial_k R^\ell_{ipj} = \Gamma^\ell_{qp}\Gamma^m_{ik}\Gamma^q_{mj} - \Gamma^\ell_{qp}\Gamma^m_{ij}\Gamma^q_{mk} + \Gamma^\ell_{qj}\Gamma^m_{ip}\Gamma^q_{mk} - \Gamma^\ell_{qj}\Gamma^m_{ik}\Gamma^q_{mp} + \Gamma^\ell_{qk}\Gamma^m_{ij}\Gamma^q_{mp} \\
&- \Gamma^\ell_{qk}\Gamma^m_{ip}\Gamma^q_{mj} - \Gamma^m_{ip}\Gamma^q_{mk}\Gamma^\ell_{qj} + \Gamma^m_{ip}\Gamma^q_{mj}\Gamma^\ell_{qk} - \Gamma^m_{ij}\Gamma^q_{mp}\Gamma^\ell_{qk} + \Gamma^m_{ij}\Gamma^q_{mk}\Gamma^\ell_{qp} - \Gamma^m_{ik}\Gamma^q_{mj}\Gamma^\ell_{qp} + \Gamma^m_{ik}\Gamma^q_{mp}\Gamma^\ell_{qj}
\end{aligned}$$

donde

$$\partial_p R^\ell_{ikj} + \partial_j R^\ell_{ikp} + \partial_k R^\ell_{ipj} = 0 \tag{2.7}$$

A expressão 2.7 é denominada 2ª identidade de Bianchi.

O tensor de curvatura de Riemann-Christoffel gera um tensor de curvatura expresso em componentes covariantes; com a multiplicação do tensor R^{ℓ}_{ijk} pelo tensor métrico $g_{p\ell}$ segue-se

$$g_{p\ell}R^{\ell}_{ijk} = g_{p\ell}\left(\frac{\partial\Gamma^{\ell}_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial\Gamma^{\ell}_{ij}}{\partial x^k} + \Gamma^m_{ik}\Gamma^{\ell}_{mj} - \Gamma^m_{ij}\Gamma^{\ell}_{mk}\right)$$

ou

$$g_{p\ell}R^{\ell}_{ijk} = \frac{\partial\left(g_{p\ell}\Gamma^{\ell}_{ik}\right)}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{p\ell}}{\partial x^j}\Gamma^{\ell}_{ik} - \frac{\partial\left(g_{p\ell}\Gamma^{\ell}_{ij}\right)}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{p\ell}}{\partial x^k}\Gamma^{\ell}_{ij} + g_{p\ell}\Gamma^m_{ik}\Gamma^{\ell}_{mj} - g_{p\ell}\Gamma^m_{ij}\Gamma^{\ell}_{mk}$$

A identidade de Ricci permite escrever

$$\frac{\partial g_{p\ell}}{\partial x^j} = \Gamma_{pj,\ell} + \Gamma_{\ell j,p} \qquad\qquad \frac{\partial g_{p\ell}}{\partial x^k} = \Gamma_{pk,\ell} + \Gamma_{\ell k,p}$$

então

$$g_{p\ell}R^{\ell}_{ijk} = \frac{\partial\left(g_{p\ell}\Gamma^{\ell}_{ik}\right)}{\partial x^j} - \frac{\partial\left(g_{p\ell}\Gamma^{\ell}_{ij}\right)}{\partial x^k} + \Gamma^{\ell}_{ik}\left(\Gamma_{pj,\ell} + \Gamma_{\ell j,p}\right) + \Gamma^{\ell}_{ij}\left(\Gamma_{pk,\ell} + \Gamma_{\ell k,p}\right) - \Gamma_{mk,p}\Gamma^m_{ij} + \Gamma_{mj,p}\Gamma^m_{ik}$$

$$= \frac{\partial\Gamma_{ik,p}}{\partial x^j} - \frac{\partial\Gamma_{ij,p}}{\partial x^k} - \Gamma^{\ell}_{ik}\left(\Gamma_{pj,\ell} + \Gamma_{\ell j,p}\right) + \Gamma^{\ell}_{ij}\left(\Gamma_{pk,\ell} + \Gamma_{\ell k,p}\right) - \Gamma_{mk,p}\Gamma^m_{ij} + \Gamma_{mj,p}\Gamma^m_{ik}$$

Trocando-se os índices $m \to \ell$ nos últimos dois termos segue-se

$$g_{p\ell}R^{\ell}_{ijk} = \frac{\partial\Gamma_{ik,p}}{\partial x^j} - \frac{\partial\Gamma_{ij,p}}{\partial x^k} + \Gamma^{\ell}_{ij}\Gamma_{pk,\ell} - \Gamma^{\ell}_{ik}\Gamma_{pj,\ell}$$

donde tem-se para o tensor de curvatura de Riemann-Christoffel de variância (0, 4), ou tensor de Riemann-Christoffel do 1º tipo

$$R_{pijk} = \frac{\partial\Gamma_{ik,p}}{\partial x^j} - \frac{\partial\Gamma_{ij,p}}{\partial x^k} + \Gamma^{\ell}_{ij}\Gamma_{pk,\ell} - \Gamma^{\ell}_{ik}\Gamma_{pj,\ell} \qquad (2.8)$$

Para o tensor covariante de Riemann-Christoffel tem-se da 1ª identidade de Bianchi

$$g_{\ell p}\left(R^{\ell}_{ikj} + R^{\ell}_{jki} + R^{\ell}_{kij}\right) = 0$$

donde resulta a propriedade cíclica

$$R_{pikj} + R_{pjki} + R_{pkij} = 0 \qquad (2.9)$$

Considerando-se a antissimetria do tensor de Riemann-Christoffel de variância (1, 3) tem-se

$$g_{p\ell}R^{\ell}_{ijk} = -g_{p\ell}R^{\ell}_{ikj} \quad \rightarrow \quad R_{pijk} = -R_{pikj}$$

Essa relação mostra que o tensor de Riemann-Christoffel de variância (0, 4) é antissimétrico nos dois últimos índices, assim

$$R_{pijk} = \frac{\partial \Gamma_{ik,p}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{ij,p}}{\partial x^k} + \Gamma^{\ell}_{ij}\Gamma_{pk,\ell} - \Gamma^{\ell}_{ik}\Gamma_{pj,\ell}$$

e com as expressões

$$\Gamma_{ik,p} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{pk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ip}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^p}\right) \qquad \Gamma_{ij,p} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jp}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ip}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^p}\right)$$

$$\Gamma_{pk,\ell} = g_{q\ell}\Gamma^{q}_{pk} \qquad \Gamma_{pj,\ell} = g_{q\ell}\Gamma^{q}_{pj}$$

segue-se

$$R_{pijk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j \partial x^p} + \frac{\partial^2 g_{pk}}{\partial x^j \partial x^i} - \frac{\partial^2 g_{ji}}{\partial x^k \partial x^p} - \frac{\partial^2 g_{pj}}{\partial x^k \partial x^i}\right) + g_{q\ell}\left(\Gamma^{q}_{pk}\Gamma^{\ell}_{ij} - \Gamma^{q}_{pj}\Gamma^{\ell}_{ik}\right) \tag{2.10}$$

Em função dos valores assumidos pelos tensores de Riemann-Christoffel os espaços são classificados em: a) planos: $R^{\ell}_{ijk} = R_{ijkm} = 0$; b) espaços curvos $R^{\ell}_{ijk} \neq 0; R_{ijkm} \neq 0$. A condição $R^{i}_{\ell jk} = R_{ijkm} = 0$ indica que o espaço é plano sendo constantes as componentes do seu tensor métrico g_{ij} . Se a métrica $ds^2 = g_{ij}d\bar{x}^i d\bar{x}^j$ desse espaço for positiva definida, isto é, $|g_{ij}| > 0$, esse espaço é euclidiano, então é possível efetuar uma transformação linear das coordenadas $\bar{x}^i$ para as coordenadas x^i para as quais se tem $g_{ij} = \delta^i_j$, cuja métrica fica

$$ds^2 = \delta^i_j dx^i dx^j = dx^1dx^1 + dx^2dx^2 \ldots + dx^m dx^m \tag{2.11}$$

Os vetores de base $\boldsymbol{e}_i$ desse novo sistema coordenado X^i formam um conjunto de direções ortogonais, pois $\delta^i_j = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_i$, e definem um espaço euclidiano E_M .

O Quadro 2.1 mostra para quatro espaços de Riemann E_N o número de componentes independentes e não nulas do tensor R_{pijk} .

Quadro 2.1 – Componentes independentes e não nulas do tensor R_{pijk} .

Dimensão do espaço E_N	2	3	4	5
Número de componentes	16	81	256	625
Componentes independentes não nulas de R_{pijk}	1	6	20	50
Tipos de componentes	R_{1212}	$R_{i+1i+2\,j+1\,j+2}$	R_{pipi}, R_{ppik}, R_{pijk}	R_{pipi}, R_{ppik}, R_{pijk}

3. ESPAÇOS CONFORMES

3.1. CONCEITOS INICIAIS

Uma relação funcional é denominada conforme quando o domínio D de um conjunto de variáveis complexas num plano gera um contradomínio de valores de variáveis complexas em outro plano, preservando o ângulo e o sentido entre curvas que se interceptam. Esse conceito é generalizado para o caso de variedades no espaço de Riemann E_N e no espaço conforme $\tilde{E}_N$. Sejam esses dois espaços e um sistema de referência X^i, e a relação entre os seus tensores métricos $g_{ij}, \tilde{g}_{ij}$ dada por

$$\tilde{g}_{ij} = e^{2\phi} g_{ij} \tag{3.1}$$

onde $x^i \in D \subset E_N$, $\phi(x^i) > 0$ é uma função escalar de classe C^3.

Os ângulos entre dois vetores $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ tangentes a duas curvas nesses dois espaços de Riemann são dados por

$$\begin{aligned} cos\,\alpha &= \frac{g_{ij}u^i v^j}{\|\boldsymbol{u}\| \cdot \|\boldsymbol{v}\|} = \frac{g_{ij}u^i v^j}{\sqrt{\varepsilon \cdot g_{km}u^k u^m}\sqrt{\varepsilon \cdot g_{km}v^k v^m}} = \frac{g_{ij}u^i v^j}{\varepsilon\sqrt{g_{km}u^k u^m}\sqrt{g_{km}v^k v^m}} \\ cos\,\tilde{\alpha} &= \frac{g_{ij}u^i v^j}{\|\tilde{\boldsymbol{u}}\| \cdot \|\tilde{\boldsymbol{v}}\|} = \frac{\tilde{g}_{ij}u^i v^j}{\sqrt{\varepsilon \cdot \tilde{g}_{km}u^k u^m}\sqrt{\varepsilon \cdot \tilde{g}_{km}v^k v^m}} = \frac{e^{2\phi}g_{ij}u^i v^j}{\sqrt{\varepsilon \cdot e^{2\phi}g_{km}u^k u^m}\sqrt{\varepsilon \cdot e^{2\phi}g_{km}v^k v^m}} \\ &= \frac{g_{ij}u^i v^j}{\varepsilon\sqrt{g_{km}u^k u^m}\sqrt{g_{km}v^k v^m}} \end{aligned} \tag{3.2}$$

sendo $\varepsilon = \pm 1$ um operador funcional. A expressão 3.2 mostra que $\alpha = \tilde{\alpha}$; isto indica que a expressão 3.1 representa uma transformação conforme.

Nos espaços E_N e $\tilde{E}_N$ os tensores conjugados dos tensores métricos se relacionam por

$$\tilde{g}^{ij} = e^{-2\phi} g^{ij} \tag{3.3}$$

sendo válidas as seguintes relações nesses espaços

– versores de base

$$\tilde{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{i}} = e^{2\phi} \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}} \tag{3.4}$$

$$\tilde{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{i}} = e^{-2\phi} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{i}} \tag{3.5}$$

– módulo de um vetor

$$\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{\tilde{g}_{km} u^k u^m} = \sqrt{e^{2\phi} g_{km} u^k u^m} \tag{3.6}$$

– produto escalar de vetores

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \tilde{g}_{km} u^k v^m = e^{2\phi} g_{km} u^k v^m \tag{3.7}$$

3.2. SÍMBOLOS DE CHRISTOFFEL

Seja o símbolo de Christoffel de 1º tipo $\tilde{\Gamma}_{jk,m}$ para o espaço conforme $\tilde{E}_N$, que se relaciona com o espaço de Riemann E_N por meio das expressões 3.1 e 3.3, então

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}_{jk,m} &= \frac{1}{2}\left(\tilde{g}_{jm,k} + \tilde{g}_{km,j} - \tilde{g}_{jk,m}\right) = \frac{1}{2}\left[\left(e^{2\phi} g_{jm}\right)_{,k} + \left(e^{2\phi} g_{km}\right)_{,j} - \left(e^{2\phi} g_{jk}\right)_{,m}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(2e^{2\phi}\phi_{,k} g_{jm} + e^{2\phi} g_{jm,k}\right) + \left(2e^{2\phi}\phi_{,j} g_{km} + e^{2\phi} g_{km,j}\right) - \left(2e^{2\phi}\phi_{,m} g_{jk} + e^{2\phi} g_{jk,m}\right)\right] \\
&= e^{2\phi}\left[\frac{1}{2}\left(g_{jm,k} + g_{km,j} - g_{jk,m}\right) + \left(\phi_{,k} g_{jm} + \phi_{,j} g_{km} - \phi_{,m} g_{jk}\right)\right]
\end{aligned}$$

donde a expressão para essa conexão afim no espaço conforme $\tilde{E}_N$ fica

$$\tilde{\Gamma}_{jk,m} = e^{2\phi}\left[\Gamma_{jk,m} + \left(\phi_{,k} g_{jm} + \phi_{,j} g_{km} - \phi_{,m} g_{jk}\right)\right] \tag{3.8}$$

Para o símbolo de Christoffel de 2º tipo tem-se

$$\tilde{\Gamma}^i_{jk} = \tilde{g}^{im} \tilde{\Gamma}_{jk,m} = e^{-2\phi} g^{im} \tilde{\Gamma}_{jk,m}$$

seguindo-se

$$\tilde{\Gamma}^i_{jk} = e^{-2\phi} g^{im} e^{2\phi}\left[\Gamma_{jk,m} + \left(\phi_{,k} g_{jm} + \phi_{,j} g_{km} - \phi_{,m} g_{jk}\right)\right] = g^{im}\Gamma_{jk,m} + g^{im}\left(\phi_{,k} g_{jm} + \phi_{,j} g_{km} - \phi_{,m} g_{jk}\right)$$

donde a expressão para essa conexão afim no espaço conforme $\tilde{E}_N$ fica

$$\widetilde{\Gamma}\,^{i}_{jk} = \Gamma^{i}_{jk} + \left(\phi_{,k}\delta^{i}_{j} + \phi_{,j}\delta^{i}_{k} - \phi_{,m}g^{im}g_{jk}\right) \tag{3.9}$$

As expressões 3.8 e 3.9 mostram que os símbolos de Christoffel não são invariantes para a transformação conforme dada pela expressão 3.1.

3.3. TENSOR DE RIEMANN-CHRISTOFFEL EM ESPAÇO CONFORME

A definição do tensor de Riemann-Christoffel no espaço conforme $\widetilde{E}_N$ é dada por

$$\widetilde{R}_{ijk\ell} = \frac{1}{2}\left(\widetilde{g}_{i\ell,kj} + \widetilde{g}_{jk,\ell i} - \widetilde{g}_{j\ell,ki} - \widetilde{g}_{ik,\ell j}\right) + \widetilde{g}_{mn}\left(\widetilde{\Gamma}^{m}_{jk}\widetilde{\Gamma}^{n}_{i\ell} - \widetilde{\Gamma}\,^{m}_{j\ell}\widetilde{\Gamma}\,^{n}_{ik}\right) \tag{3.10}$$

Paras as derivadas do tensor métrico seguem-se

$$\widetilde{g}\;_{i\ell} = e^{2\phi}g_{i\ell} \;\Rightarrow\; \widetilde{g}\;_{i\ell,k} = 2\phi_{,k}e^{2\phi}g_{i\ell} + e^{2\phi}g_{i\ell,k}$$
$$\widetilde{g}\;_{i\ell,kj} = 4\phi_{,k}\phi_{,j}e^{2\phi}g_{i\ell} + 2\phi_{,kj}e^{2\phi}g_{i\ell} + 2\phi_{,k}e^{2\phi}g_{i\ell,j} + 2\phi_{,j}e^{2\phi}g_{i\ell,k} + e^{2\phi}g_{i\ell,kj}$$

e de modo análogo tem-se

$$\widetilde{g}\;_{jk,\ell i} = 4\phi_{,\ell}\phi_{,i}e^{2\phi}g_{jk} + 2\phi_{,\ell i}e^{2\phi}g_{jk} + 2\phi_{,\ell}e^{2\phi}g_{jk,i} + 2\phi_{,i}e^{2\phi}g_{jk,\ell} + e^{2\phi}g_{jk,\ell i}$$
$$\widetilde{g}_{j\ell,ki} = 4\phi_{,k}\phi_{,i}e^{2\phi}g_{j\ell} + 2\phi_{,ki}e^{2\phi}g_{j\ell} + 2\phi_{,k}e^{2\phi}g_{j\ell,i} + 2\phi_{,i}e^{2\phi}g_{j\ell,k} + e^{2\phi}g_{j\ell,ki}$$
$$\widetilde{g}_{ik,\ell j} = 4\phi_{,\ell}\phi_{,j}e^{2\phi}g_{ik} + 2\phi_{,\ell j}e^{2\phi}g_{ik} + 2\phi_{,\ell}e^{2\phi}g_{ik,j} + 2\phi_{,j}e^{2\phi}g_{ik,\ell} + e^{2\phi}g_{ik,\ell j}$$

Para os símbolos de Christoffel seguem-se por meio da expressão 3.9:

$$\widetilde{\Gamma}^{m}_{jk} = \Gamma^{m}_{jk} + \left(\phi_{,k}\delta^{m}_{j} + \phi_{,j}\delta^{m}_{k} - \phi_{,i}g^{mi}g_{jk}\right)$$
$$\widetilde{\Gamma}^{n}_{i\ell} = \Gamma^{n}_{i\ell} + \left(\phi_{,\ell}\delta^{n}_{i} + \phi_{,i}\delta^{n}_{\ell} - \phi_{,m}g^{nm}g_{i\ell}\right)$$
$$\widetilde{\Gamma}^{m}_{j\ell} = \Gamma^{m}_{j\ell} + \left(\phi_{,\ell}\delta^{m}_{j} + \phi_{,j}\delta^{m}_{\ell} - \phi_{,i}g^{mi}g_{j\ell}\right)$$
$$\widetilde{\Gamma}^{n}_{ik} = \Gamma^{n}_{ik} + \left(\phi_{,k}\delta^{n}_{i} + \phi_{,i}\delta^{n}_{k} - \phi_{,n}g^{mn}g_{ik}\right)$$

A substituição dessas expressões na expressão 3.10 leva à

$$\widetilde{R}\;_{ijk\ell} = e^{2\phi}\left\{\begin{array}{l} R\;_{ijk\ell} + \left[g_{i\ell}\left(\phi_{,jk} - \phi_{,j}\phi_{,k}\right) + g_{jk}\left(\phi_{,i\ell} - \phi_{,i}\phi_{,\ell}\right) - g_{ik}\left(\phi_{,j\ell} - \phi_{,j}\phi_{,\ell}\right) - g_{j\ell}\left(\phi_{,ik} - \phi_{,i}\phi_{,k}\right)\right] \\ + \left[g_{i\ell}g_{jk}\left(g^{mn}\phi_{,m}\phi_{,n}\right) - g_{ik}g_{j\ell}\left(g^{mn}\phi_{,m}\phi_{,n}\right)\right] \end{array}\right\}$$

Pondo-se

$$\phi_{jk} = \phi_{kj} = \phi_{,jk} - \phi_{,j}\phi_{,k} \qquad \phi_{i\ell} = \phi_{\ell i} = \phi_{,i\ell} - \phi_{,i}\phi_{,\ell}$$
$$\phi_{j\ell} = \phi_{\ell j} = \phi_{,j\ell} - \phi_{,j}\phi_{,\ell} \qquad \phi_{ik} = \phi_{ki} = \phi_{,ik} - \phi_{,i}\phi_{,k}$$

resulta

$$\widetilde{R}_{ijk\ell} = e^{2\phi}\left[R\;_{ijk\ell} + g_{i\ell}\phi_{jk} + g_{jk}\phi_{i\ell} - g_{ik}\phi_{j\ell} - g_{j\ell}\phi_{ik} + g^{mn}\phi_{,m}\phi_{,n}\left(g_{i\ell}g_{jk} - g_{ik}g_{j\ell}\right)\right] \tag{3.11}$$

Essa expressão mostra que o tensor de Riemann-Christoffel não é invariante para a transformação conforme definida pela expressão 3.1.

3.4. TENSOR DE RICCI

A definição do tensor de Ricci no espaço conforme $\tilde{E}_N$ é dada por

$$\tilde{R}_{jk} = \tilde{g}^{ik}\tilde{R}_{ijk\ell} \tag{3.12}$$

e com a substituição da expressão 3.3 na expressão 3.12 seguem-se

$$\tilde{R}_{j\ell} = e^{-2\phi} g^{ik}\left[R_{ijk\ell} + g_{i\ell}\phi_{jk} + g_{jk}\phi_{j\ell} - g_{ik}\phi_{j\ell} - g_{j\ell}\phi_{ik} + g^{mn}\phi_{,m}\phi_{,n}\left(g_{i\ell}g_{jk} - g_{ik}g_{j\ell}\right)\right]$$
$$\tilde{R}_{j\ell} = R_{j\ell} + \delta_\ell^k\phi_{jk} + \delta_j^i\phi_{j\ell} - \delta_i^i\phi_{j\ell} - g^{ik}g_{j\ell}\phi_{ik} + g^{mn}\phi_{,m}\phi_{,n}\left(\delta_\ell^k g_{jk} - \delta_i^i g_{j\ell}\right)$$

Pondo-se

$$\phi = g^{ik}\phi_{ik}$$

então

$$\begin{aligned} \phi &= g^{mn}\phi_{mn} = g^{mn}\left(\phi_{,mn} - \phi_{,m}\phi_{,n}\right) \\ g^{mn}\phi_{,m}\phi_{,n} &= g^{mn}\phi_{,mn} - g^{mn}\phi_{mn} \end{aligned} \tag{3.13}$$

assim

$$\tilde{R}_{j\ell} = R_{j\ell} + \phi_{j\ell} + \phi_{j\ell} - N\phi_{j\ell} - \phi g_{j\ell} + g^{mn}\phi_{,m}\phi_{,n}\left(g_{j\ell} - Ng_{j\ell}\right)$$

donde

$$\tilde{R}_{j\ell} = R_{j\ell} - (N-2)\phi_{j\ell} - g_{j\ell}g^{mn}\phi_{,mn} - (N-2)g_{j\ell}g^{mn}\phi_{,m}\phi_{,n} \tag{3.14}$$

é a expressão para o tensor de Ricci no espaço conforme $\tilde{E}_N$, o qual não é invariante para a transformação conforme definida pela expressão 3.1.

3.5. CURVATURA ESCALAR

A definição da curvatura escalar no espaço conforme é dada por

$$\tilde{R} = \tilde{g}^{j\ell}\tilde{R}_{j\ell}$$

e com a substituição da expressão 3.3 nessa expressão seguem-se

$$\begin{aligned} \tilde{R} &= \tilde{g}^{j\ell}\left[R_{j\ell} - (N-2)\phi_{j\ell} - g_{j\ell}g^{mn}\phi_{,mn} - (N-2)g_{j\ell}g^{mn}\phi_{,m}\phi_{,n}\right] \\ &= e^{-2\phi}g^{j\ell}\left[R_{j\ell} - (N-2)\phi_{j\ell} - g_{j\ell}g^{mn}\phi_{,mn} - (N-2)g_{j\ell}g^{mn}\phi_{,m}\phi_{,n}\right] \end{aligned}$$

donde

$$\tilde{R} = e^{-2\phi}\left\{R + \left[-2(N-1)\phi_{,mn} - (N-1)(N-2)\phi_{,m}\phi_{,n}\right]g^{mn}\right\} \qquad (3.15)$$

é a expressão para a curvatura escalar no espaço $\tilde{E}_N$, que não é invariante para a transformação conforme definida pela expressão 3.1.

3.6. TENSOR DE WEYL

A pesquisa de uma variedade que permanece invariante quando da passagem do espaço E_N para o espaço conforme $\tilde{E}_N$, levou Hermann Weyl a conceber um tensor que tivesse as mesmas propriedades do tensor de Riemann-Christoffel e fosse invariante quando de uma transformação conforme definida pela expressão 3.1.

Seja o tensor de Riemann-Christoffel no espaço $\tilde{E}_N$ definido por

$$\tilde{R}_{ijk\ell} = e^{2\phi}\left[R_{ijk\ell} + \left(g_{i\ell}\phi_{jk} + g_{jk}\phi_{j\ell} - g_{ik}\phi_{j\ell} - g_{j\ell}\phi_{ik}\right) + \left(g_{i\ell}g_{jk} - g_{ik}g_{j\ell}\right)g^{mn}\phi_{,m}\phi_{,n}\right]$$ e com as expressões

$$\tilde{g}^{ip}\tilde{R}_{ijk\ell} = \tilde{R}^{p}_{jk\ell} \qquad \tilde{g}^{ip} = e^{-2\phi}g^{ip}$$

tem-se

$$\tilde{R}^{p}_{jk\ell} = R^{p}_{jk\ell} + \delta^{p}_{\ell}\phi_{jk} - \delta^{p}_{k}\phi_{j\ell} + g^{ip}\left(g_{jk}\phi_{i\ell} - g_{j\ell}\phi_{ik}\right) + \left(\delta^{p}_{\ell}g_{jk} - \delta^{p}_{k}\phi_{j\ell}\right)g^{mn}\phi_{,m}\phi_{,n} \qquad (3.16)$$

O termo $g^{mn}\phi_{,m}\phi_{,n}$ nessa expressão pode ser eliminado, pois com a expressão 3.13 é possível obter os parâmetros $\phi_{j\ell}, \phi_{jk}, \phi_{i\ell}, \phi_{ik}$ em termos do tensor de Ricci, da curvatura escalar e do tensor métrico, assim

$$\phi_{j\ell} = -\frac{1}{(N-2)}\left(\tilde{R}_{j\ell} + R_{j\ell}\right) - \frac{1}{(N-2)}g_{j\ell}g^{mn}\phi_{,mn} - g_{j\ell}g^{mn}\phi_{,m}\phi_{,n} \qquad (3.17)$$

donde

$$g_{j\ell}g^{mn}\phi_{,mn} = -\frac{1}{2(N-1)}\left(\tilde{R}e^{2\phi} + R\right) - \frac{(N-2)}{2}g_{j\ell}\phi_{,m}\phi_{,n}$$

e com

$$e^{2\phi} = \frac{\tilde{g}_{j\ell}}{g_{j\ell}}$$

tem-se

$$g_{j\ell} g^{mn} \phi_{,mn} = -\frac{1}{2(N-1)}\left(\tilde{R}\tilde{g}_{j\ell} + R g_{j\ell}\right) - \frac{(N-2)}{2} g_{j\ell}\phi_{,m}\phi_{,n} \tag{3.18}$$

A substituição da expressão 3.17 na expressão 3.16 fornece

$$\phi_{j\ell} = -\frac{1}{(N-2)}\left(\tilde{R}_{j\ell} - R_{j\ell}\right) - \frac{1}{2(N-1)(N-2)}\left(\tilde{R}\tilde{g}_{j\ell} - R g_{j\ell}\right) - \frac{1}{2} g_{j\ell} g^{mn}\phi_{,m}\phi_{,n} \tag{3.19}$$

Os demais parâmetros análogos a esse parâmetro ficam

$$\left.\begin{aligned}
\phi_{jk} &= -\frac{1}{(N-2)}\left(\tilde{R}_{jk} - R_{jk}\right) - \frac{1}{2(N-1)(N-2)}\left(\tilde{R}\tilde{g}_{jk} - R g_{jk}\right) - \frac{1}{2} g_{jk} g^{mn}\phi_{,m}\phi_{,n} \\
\phi_{i\ell} &= -\frac{1}{(N-2)}\left(\tilde{R}_{i\ell} - R_{i\ell}\right) - \frac{1}{2(N-1)(N-2)}\left(\tilde{R}\tilde{g}_{i\ell} - R g_{i\ell}\right) - \frac{1}{2} g_{i\ell} g^{mn}\phi_{,m}\phi_{,n} \\
\phi_{ik} &= -\frac{1}{(N-2)}\left(\tilde{R}_{ik} - R_{ik}\right) - \frac{1}{2(N-1)(N-2)}\left(\tilde{R}\tilde{g}_{ik} - R g_{ik}\right) - \frac{1}{2} g_{ik} g^{mn}\phi_{,m}\phi_{,n}
\end{aligned}\right. \tag{3.20}$$

Com a substituição das expressões 3.19 e 3.20 na expressão 3.16 e com as expressões 3.1 e 3.3 resulta

$$\left.\begin{aligned}
&\tilde{R}^p_{jk\ell} - \frac{1}{(N-2)}\left(\delta^p_k \tilde{R}_{j\ell} - \delta^p_\ell \tilde{R}_{jk} + \tilde{g}_{j\ell}\tilde{R}^p_k - \tilde{g}_{jk}\tilde{R}^p_\ell\right) + \frac{\tilde{R}}{(N-1)(N-2)}\left(\delta^p_k \tilde{g}_{j\ell} - \delta^p_\ell \tilde{g}_{jk}\right) \\
&\quad = R^p_{jk\ell} - \frac{1}{(N-2)}\left(\delta^p_k R_{j\ell} - \delta^p_\ell R_{jk} + g_{j\ell}R^p_k - g_{jk}R^p_\ell\right) + \frac{R}{(N-1)(N-2)}\left(\delta^p_k g_{j\ell} - \delta^p_\ell g_{jk}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{3.21}$$

Pondo-se

$$W^p_{jk\ell} = R^p_{jk\ell} - \frac{1}{(N-2)}\left(\delta^p_k R_{j\ell} - \delta^p_\ell R_{jk} + g_{j\ell}R^p_k - g_{jk}R^p_\ell\right) + \frac{R}{(N-1)(N-2)}\left(\delta^p_k g_{j\ell} - \delta^p_\ell g_{jk}\right) \tag{3.22}$$

verifica-se que a expressão 3.21 representa uma igualdade entre tensores

$$\tilde{W}^p_{jk\ell} = W^p_{jk\ell}$$

e mostra que o tensor $W^p_{jk\ell}$ é preservado quando de uma transformação conforme, ou seja, esse tensor é invariante para o espaço $\tilde{E}_N$.

Rebaixando-se o índice do tensor $W^p_{jk\ell}$ segue-se

$$g_{pi} W^p_{jk\ell} = W_{ijk\ell}$$

donde

$$W_{ijk\ell} = R_{ijk\ell} - \frac{1}{(N-2)}\left(g_{ik} R_{j\ell} - g_{i\ell} R_{jk} + g_{j\ell}R^p_k - g_{jk}R^p_\ell\right) + \frac{R}{(N-1)(N-2)}\left(g_{ik} g_{j\ell} - g_{i\ell} g_{jk}\right) \tag{3.23}$$

define o tensor de curvatura de Weyl.

Essa expressão mostra que o tensor $W_{ijk\ell}$ é obtido por meio da decomposição do tensor de Riemann-Christoffel $R_{ijk\ell}$ em suas partes constituídas pelo tensor de Ricci e pela curvatura escalar; isto indica que o tensor de Riemann-Christoffel pode ser decomposto em componentes irredutíveis.

A expressão 3.23 indica que o tensor $W_{ijk\ell}$ tem o mesmo número de componentes independentes que o tensor $R_{ijk\ell}$, ou seja, $\frac{1}{12}N(N+1)(N+2)(N-3)$ componentes; a soma tensorial dada por essa expressão mostra que o tensor de Weyl tem as mesmas propriedades de simetria e antissimetria que o tensor $R_{ijk\ell}$, então

$$W_{ijk\ell} = W_{k\ell ij}$$
$$W_{ijk\ell} = -W_{jik\ell} = -W_{ij\ell k}$$

Essas propriedades indicam que a 1ª identidade de Bianchi é válida para o tensor de Weyl

$$W^{\ell}_{ijk} + W^{\ell}_{jki} + W^{\ell}_{kij} = 0$$
$$W_{ijk\ell} + W_{ikj\ell} + W_{ik\ell j} = 0$$

Para o espaço de Riemann E_1 tem-se $R_{ijk\ell} = 0$; para o espaço bidimensional E_2 tem-se apenas a componente R_{1212}, e a curvatura é definida pela curvatura escalar; para o espaço tridimensional E_3 as seis componentes do tensor de curvatura ficam definidas pelo tensor de Ricci, sendo $W_{ijk\ell} = 0$. Para o espaço E_N, $N > 3$ as componentes de $R_{ijk\ell}$ são determinadas pelo tensor de Ricci e pelo tensor de Weyl.

Para demonstrar a unicidade do tensor de Weyl seja a expressão que determina a curvatura de Riemann K no ponto x^i do espaço isotrópico E_N, $N > 3$, assim

$$R_{ijk\ell} = K\left(g_{ik}g_{j\ell} - g_{i\ell}g_{jk}\right)$$

$$R_{jk} = K(1-N)g_{jk}$$

então

$$K = \frac{R_{jk} g^{jk}}{(1-N)}$$

$$R_{ijk\ell} = \frac{R_{jk} g^{jk}}{(1-N)} \left(g_{il} g_{j\ell} - g_{i\ell} g_{jk} \right) = \frac{1}{(1-N)} \left[\left(R_{jk} g^{jk} g_{j\ell} \right) g_{ik} - \left(R_{jk} g^{jk} g_{jk} \right) g_{i\ell} \right]$$

$$R_{jk} g^{jk} g_{j\ell} = R_{jk} \delta_{\ell}^{k} = R_{j\ell}$$

$$R_{jk} g^{jk} g_{jk} = R_{jk}$$

$$R_{ijk\ell} = \frac{1}{(1-N)} \left(R_{j\ell} g_{ik} - R_{jk} g_{i\ell} \right) \tag{3.24}$$

O tensor de Weyl fica definido pela expressão

$$W_{ijk\ell} = R_{ijk\ell} - \frac{1}{(1-N)} \left(R_{j\ell} g_{ik} - R_{jk} g_{i\ell} \right) \tag{3.25}$$

Se $W_{ijk\ell} = 0$ no espaço isotrópico de Riemann E_N , $N > 3$ a expressão 3.25 é nula, e verifica-se que a expressão 3.24 é válida para esse espaço. Essa é a condição necessária para que esse espaço tenha curvatura de Riemann constante.

Para demonstrar que a curvatura de Riemann deve ser constante para a condição $W_{ijk\ell} = 0$ efetua-se a multiplicação da expressão 3.24 por $g^{j\ell}$, assim

$$g^{j\ell} R_{ijk\ell} = -g^{j\ell} R_{jik\ell} = -R_{ik} = \frac{1}{(1-N)} \left(g^{j\ell} R_{j\ell} g_{ik} - g^{j\ell} R_{jk} g_{i\ell} \right)$$

$$= \frac{1}{(1-N)} \left(R g_{ik} - R_{jk} \delta_{i}^{j} \right) = \frac{1}{(1-N)} \left(R g_{ik} - R_{ik} \right)$$

$$-R_{ik} (1-N) = R g_{ik} - R_{ik}$$

$$R_{ik} = \frac{R}{N} g_{ik}$$

Essa última expressão define um espaço de Einstein (espaço isotrópico, donde tem curvatura constante), o que comprova ser essa a condição suficiente para que o tensor de Weyl seja nulo.

Com a contração do índice k o tensor de Weyl $W_{ijk\ell}$ fica

$$g^{m\ell}W_{ijk\ell} = g^{m\ell}R_{ijk\ell} - \frac{2}{(N-2)}g^{m\ell}\left(R_{\ell j}g_{ik} - R_{\ell i}g_{jk}\right) + \frac{2}{(N-1)(N-2)}g^{m\ell}Rg_{ik}g_{\ell j}$$

$$W_{ijk}^{m} = R_{ijk}^{m} - \frac{2}{(N-2)}\left(g^{m\ell}R_{\ell j}g_{ik} - g^{m\ell}R_{\ell i}g_{jk}\right) + \frac{2}{(N-1)(N-2)}g^{m\ell}Rg_{ik}g_{\ell j}$$

$$W_{ijk}^{m} = R_{ijk}^{m} - \frac{2}{(N-2)}\left(R_{j}^{m}g_{ik} - R_{i}^{k}g_{jk}\right) + \frac{2}{(N-1)(N-2)}Rg_{j}^{m}g_{ik}$$

e para $m = k$

$$W_{ijk}^{k} = R_{ijk}^{k} - \frac{2}{(N-2)}\left(R_{j}^{k}g_{ik} - R_{i}^{k}g_{jk}\right) + \frac{2}{(N-1)(N-2)}Rg_{j}^{k}g_{ik}$$

$$W_{ij} = R_{ij} + \frac{2}{(N-1)(N-2)}Rg_{j}^{k}g_{ik}$$

A contração $W_{ijk}^{j} = 0$ mostra que o tensor de Weyl é a parcela do tensor de curvatura de Riemann-Christoffel para a qual todas as contrações são nulas, ou seja, tem-se $tr\,\boldsymbol{W} = 0$.

Para o espaço de Riemann E_4 o tensor de Weyl fica definido pela expressão 3.23

$$W_{ijk\ell} = R_{ijk\ell} - \frac{1}{2}\left(R_{\ell j}g_{ik} + R_{ki}g_{j\ell} - R_{kj}g_{i\ell} - R_{\ell i}g_{jk}\right) + \frac{1}{6}R\left(g_{ik}g_{\ell j} - g_{i\ell}g_{kj}\right) \qquad (3.26)$$

O total de componentes desse tensor é 256, mas somente 10 são algebricamente independentes, as quais são parte das 20 componentes do tensor $R_{ijk\ell}$, sendo que as outras 10 são devidas ao tensor R_{ij}.

A curvatura do espaço de Riemann E_4 é determinada pelo tensor $W_{ijk\ell}$, pois quando $R_{ij} = 0$ tem-se $R_{ijk\ell} = W_{ijk\ell}$, o que indica que se o tensor de Ricci é nulo o espaço não é necessariamente plano. O tensor de Weyl é o tensor com traço nulo que compõe o tensor de Ricci com a condição extra de se ter $R_{ij} = 0$, é, portanto, o tensor $R_{ijk\ell}$ com todas as contrações removidas.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O tensor de Weyl é uma medida da curvatura do espaço, sendo uma variedade pseudo-Riemanniana, é também denominado tensor conforme de Weyl. As suas particularidades lhe permitem definir de modo mais abrangente se um espaço é plano ou curvo, pois podem ocorrer casos nos quais o tensor de Ricci se anula, mas o espaço não é plano. Trata-se de uma variedade peculiar que engloba as componentes do tensor de Ricci e as do tensor de curvatura de Riemann-Christoffel para o qual todas as contrações foram removidas.

REFERÊNCIAS

AHSAN, Zafar. *Tensor Analysis with Applications*. Anamaya Publishers. New Delhi. 2008.

DAS, Anadijiban. *Tensors: The Mathematics of Relativity Theory and Continuum Mechanics*. Springer. U.S.A. 2007.

DE, U. C.; SHAIKH, Absos Ali; SENGUPTA, Joydeep. *Tensor Calculus*. Alpha Science International Ltd. U.K. 2008.

EISENHART, Luther Pfahler. *Riemann Geometry*. Princeton University Press. U.S.A. 1949.

FRANKEL, Theodore. *The Geometry of Physics*. Cambridge University Press. U.S.A. 2007..

LEE, John M. *Riemann Manifolds. An Introduction to Curvature*. Springer. U.S.A. 1997.

LEVI-CIVITA, Tullio. *The Absolute Differential Calculus (Calculus of Tensors)*. Dover Publications. U.S.A. Reimpressão da edição de 1926.

SÁNCHEZ FILHO, Emil de Souza. *Tensor Calculus for Engineers and Physicists.* Springer. Deutschland. 2016.

WEATHERBURN, C. E. *An Introduction to Riemann Geometry and the Tensor Calculus*. Cambridge University Press. U.K. 2008.

.